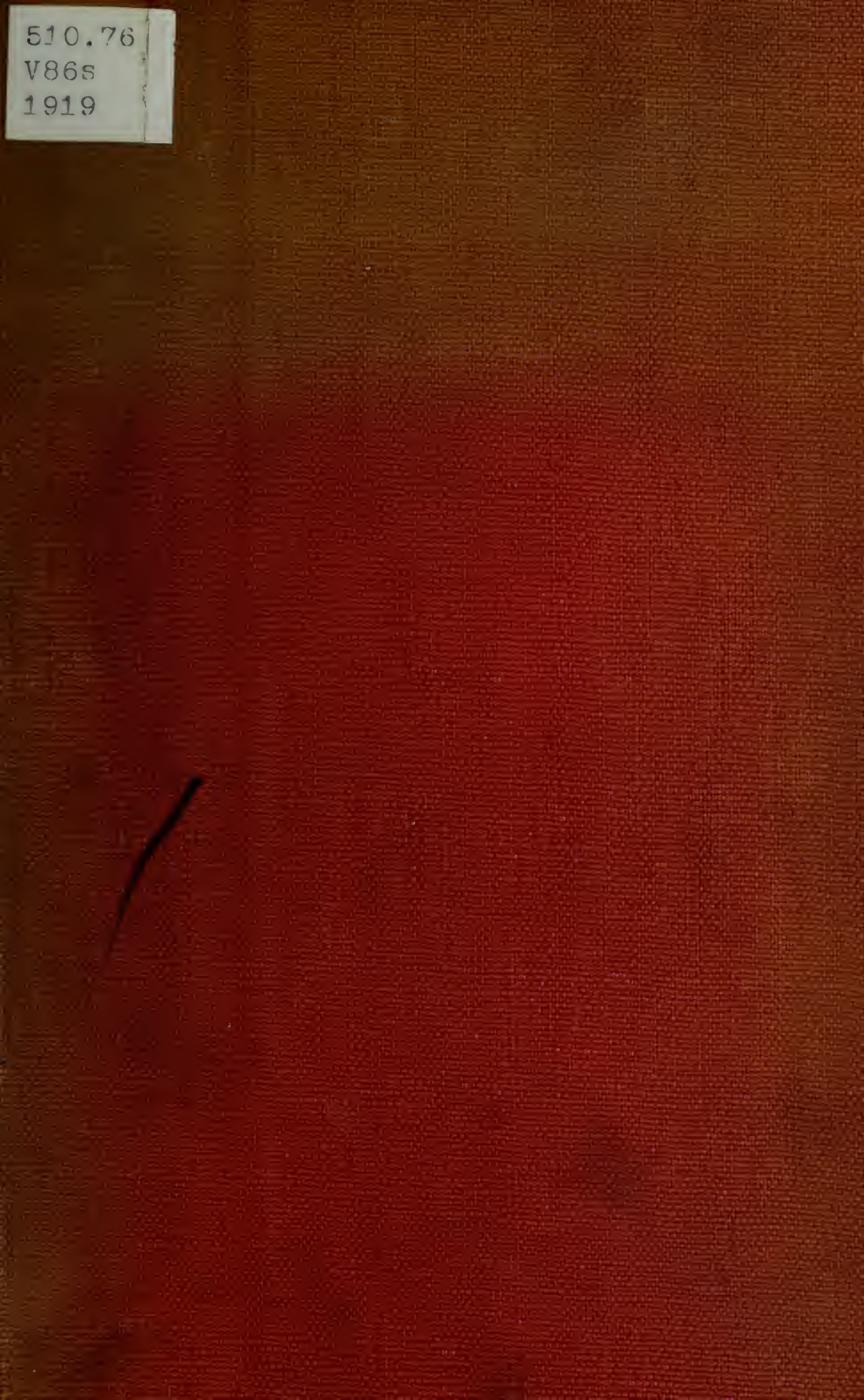

510.76
V86s
1919



SOLUTIONS DES EXERCICES

PROPOSÉS DANS LES ÉLÉMENTS

DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

DU MÊME AUTEUR

A LA MÊME LIBRAIRIE

Éléments de Mathématiques supérieures, à l'usage des Physiciens, chimistes et ingénieurs et des aspirants à ces titres, des conducteurs de travaux et des élèves des Facultés des sciences et des Écoles industrielles. — Un fort volume 25/16cm avec de nombreuses figures. 8e édition. . . . . 12 fr. »

Éléments de Mathématiques supérieures *(Édition réduite),* à l'usage des chimistes et des élèves des écoles industrielles. — Un vol. 25/16cm. . . . . 7 fr. »

Leçons sur la résolution algébrique des équations, avec une préface de M. Jules Tannery, directeur des Études scientifiques à l'École normale supérieure. — Un vol. 25/16cm. . . . . 5 fr. »

Ajouter aux prix ci-dessus le montant de la majoration temporaire.

H. VOGT

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE NANCY

SOLUTIONS

DES EXERCICES PROPOSÉS

DANS LES

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

DEUXIÈME ÉDITION

PARIS

LIBRAIRIE VUIBERT

63, Boulevard Saint-Germain, 63

1919

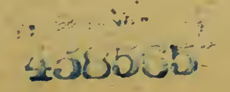
PRÉFACE

A la demande de plusieurs lecteurs des *Éléments de Mathématiques supérieures,* j'ai rédigé les solutions des exercices proposés à la fin de cet ouvrage. Ces exercices ne sont pas inédits pour la plupart, mais ils sont coordonnés aux théories développées dans les *Éléments* et constituent des applications immédiates de ces théories. Les solutions rédigées seront, je l'espère, utiles aux élèves qui débutent dans l'étude de l'Analyse et de la Géométrie analytique et leur permettront d'aborder plus facilement les questions plus élevées de Mathématiques et de Physique.

Les numéros indiqués comme renvois dans les *Solutions* sont ceux des *Éléments de Mathématiques supérieures.*

Nancy, septembre 1913.

H. Vogt.



SOLUTIONS DES EXERCICES

I. — EXERCICES SUR LES COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE

1. — *Résoudre le système d'équations*

$$(m+1)x+y=m,$$
$$3x+(m-1)y=2;$$

examiner les différents cas qui se présentent suivant les valeurs de m.

En tirant x de la deuxième équation et portant dans la première, on a le système équivalent

$$x=\frac{2-(m-1)y}{3}, \qquad (m^2-4)y+(m-2)=0.$$

Si m^2-4 n'est pas nul, on a une seule solution $y=-\frac{1}{m+2}$, $x=\frac{3m+1}{3(m+2)}$; si $m=2$, y est indéterminé et $x=\frac{2-y}{3}$; enfin si $m=-2$, le système est impossible.

2. — *Calculer le déterminant* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; *montrer qu'il est égal au déterminant* $\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}$, *et en déduire que* $a^3+b^3+c^3-3abc$ *est divisible par* $a+b+c$.

La règle du n° 4 donne

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

Le théorème VI du n° 9 montre qu'on peut ajouter aux éléments de la première colonne ceux des deux autres ; le théorème IV du même n° montre que le déterminant ainsi transformé est divisible par $a+b+c$ et a pour valeur

$$\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2);$$

on a donc

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

---

3. — *Calculer le déterminant* $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$; *montrer* a priori *qu'il est nul si deux des quantités* a, b, c *sont égales, et en conclure qu'il est égal au produit des différences de ces quantités deux à deux.*

Le déterminant est égal à

$$D = a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b,$$

et l'on vérifie qu'il est égal au produit

$$P = (a-b)(a-c)(b-c).$$

A priori, lorsque l'on fait $a=b$, le déterminant est nul d'après le théorème III du n° 9 ; il est donc divisible par $a-b$, de même par $a-c$ et par $b-c$, donc par P, et D ne diffère de P que par un facteur numérique. En comparant les coefficients de a^2b dans D et P, on voit que ce facteur est égal à l'unité, et $D = P$.

---

4. — *Sachant qu'entre les côtés et les angles d'un triangle existent les relations*

$$a = b\cos C + c\cos B, \quad b = c\cos A + a\cos C, \quad c = a\cos B + b\cos A,$$

en déduire, par l'élimination de a, b, c, *la relation qui existe entre les cosinus des trois angles* A, B, C.

Les trois relations, écrites sous la forme

$$-a + b\cos C + c\cos B = 0, \qquad a\cos C - b + c\cos A = 0,$$
$$a\cos B + b\cos A - c = 0,$$

et considérées comme trois équations à trois inconnues a, b et c, ont au moins une solution où les inconnues ne sont pas nulles ; d'après le théorème du n° 12, le déterminant des coefficients des inconnues dans les équations doit être nul, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

et, en développant, on obtient l'équation

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C - 1 = 0.$$

Inversement, si les cosinus de trois angles sont liés par l'équation précédente, le premier membre considéré comme un trinome en cos A a pour racines

$$-\cos B\cos C \pm \sqrt{\cos^2 B\cos^2 C - \cos^2 B - \cos^2 C + 1}$$
$$= -\cos B\cos C \pm \sin B\sin C = -\cos(B \pm C) ;$$

par suite l'équation se met sous la forme

$$[\cos A + \cos(B + C)]\,[\cos A + \cos(B - C)]$$
$$= 4\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{B+C-A}{2}\cos\frac{A+C-B}{2}\cos\frac{A+B-C}{2} = 0 ;$$

elle est satisfaite par les systèmes de nombres A, B, C tels que l'une des quatre quantités $A+B+C$, $B+C-A$, $A+C-B$, $A+B-C$ soit égale à $(2k+1)\pi$, k étant un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif ; comme cas particulier, on trouve $A+B+C=\pi$.

---

5. — *Calculer le déterminant* $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$, *et vérifier qu'il est carré parfait.*

D'après le procédé indiqué au n° 8, le déterminant est égal à la somme

$$a\begin{vmatrix} a & b & c \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -d & 0 & f \end{vmatrix},$$

et, en développant chacun des déterminants du 3e degré, on trouve

$$a^2f^2 + b^2e^2 + c^2d^2 + 2acdf - 2abef - 2bced = (af + cd - be)^2.$$

Le déterminant est appelé symétrique gauche; plus généralement, tout déterminant de cette forme est nul s'il est de degré impair, et carré parfait s'il est de degré pair.

---

6. — *Résoudre le système d'équations*

$$qz + ry = a, \qquad rx + pz = b, \qquad py + qx = c.$$

Le déterminant des coefficients des inconnues est

$$\begin{vmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{vmatrix} = 2pqr;$$

l'application de la règle du n° 10 donne

$$x = \frac{-ap + bq + cr}{2qr}, \qquad y = \frac{ap - bq + cr}{2pr}, \qquad z = \frac{ap + bq - cr}{2pq}.$$

---

7. — *Résoudre le système d'équations*

$$qz - ry = a, \qquad rx - pz = b, \qquad py - qx = c;$$

suivant que $ap + bq + cr$ *est différent de zéro ou égal à zéro, le système est impossible ou indéterminé.*

Le déterminant des coefficients des inconnues est

$$\begin{vmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

les trois nombres p, q, r n'étant pas supposés nuls à la fois, et r étant par exemple différent de 0, le déterminant caractéristique relatif au mineur non nul $\begin{vmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{vmatrix}$ a pour valeur

$$\begin{vmatrix} 0 & -r & a \\ r & 0 & b \\ -q & p & c \end{vmatrix} = r(ap + bq + cr)$$

et il est nul en même temps que $ap + bq + cr$; si cette quantité n'est pas nulle, le système est impossible; si elle est nulle, le système est indéterminé et z peut être choisi arbitrairement.

---

8. — *Calculer les développements de* $(x+a)^5$, $(x+a)^6$, *et ceux de* $(x+y+z)^2$, $(x+y+z)^3$.

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2zx + 2xy.$$

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz.$$

---

9. — *Calculer les coefficients successifs du développement de* $(1 + x + x^2 + \cdots)^2$, *et de* $(1 + 2x + 3x^2 + \cdots)^2$.

En multipliant $1 + x + x^2 + \cdots$ par lui-même, le terme x^n se présente lorsqu'on multiplie un terme x^p du multiplicande par le

terme x^{n-p} du multiplicateur, et cela pour $p = 0, 1, 2, \ldots, n$, donc $n+1$ fois ; le coefficient est $n+1$, d'où le développement

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

En multipliant de même cette expression par elle-même, le terme x^n se présente en multipliant le terme $(p+1)\,x^p$ du multiplicande par le terme $(n-p+1)\,x^{n-p}$ du multiplicateur, et cela pour $p = 0, 1, 2, \cdots, n$; le coefficient est donc

$$1.(n+1) + 2.n + 3(n-1) + \cdots + (n+1).1,$$

qu'on peut écrire

$$1(n+2-1) + 2(n+2-2) + 3(n+2-3) + \cdots$$
$$= (n+2)[1+2+3+\cdots+(n+1)] - [1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2];$$

on trouve ainsi pour valeur du coefficient $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$, d'où le développement

$$1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}x^n + \cdots$$

On peut remarquer que les développements précédents sont ceux de

$$\frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1-x)^4};$$

on pourrait les établir directement par division.

---

10. — *Calculer la somme des cubes des* n *premiers nombres, en partant du développement de* $(n+1)^4$; *vérifier que cette somme est égale au carré de la somme des* n *premiers nombres.*

En opérant comme au n° 18 et utilisant la formule

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,$$

on trouve

$$(n+1)^4 = 4\left(\sum_1^n p^3\right) + 6\left(\sum_1^n p^2\right) + 4\left(\sum_1^n p\right) + n + 1$$

et on en déduit

$$\sum_1^n p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_1^n p\right)^2.$$

---

11. — *Calculer la somme* $1.2+2.3+3.4+\cdots+n(n+1)$.

La somme peut s'écrire

$$1(1+1)+2(2+1)+3(3+1)+\cdots+n(n+1)$$
$$=(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

---

12. — *Effectuer le produit* $\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{4}}c^{\frac{5}{6}}\right)\left(a^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{-\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{3}{4}}\right)$.

En réduisant les exposants de a, b, c au même dénominateur 12, on obtient

$$a^{\frac{4-9-1}{12}}b^{\frac{-3+8+4}{12}}c^{\frac{10+3-9}{12}}=a^{-\frac{6}{12}}b^{\frac{9}{12}}c^{\frac{4}{12}}=a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{3}}.$$

---

13. — *Rendre rationnelles les équations*

$$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}=0, \qquad (ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}.$$

En écrivant la première équation sous la forme

$$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=-z^{\frac{1}{2}}$$

et élevant au carré, on a

$$x+y+2(xy)^{\frac{1}{2}}=z\,;$$

en isolant $(xy)^{\frac{1}{2}}$ dans un membre, élevant au carré et ordonnant, on obtient

$$x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=0.$$

On peut remarquer que le premier membre de la dernière équation est égal à

$$-\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}\right)\left(-x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}\right),$$

d'après la formule

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$
$$=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4,$$

dans laquelle on ferait

$$a = x^{\frac{1}{2}}, \quad b = y^{\frac{1}{2}}, \quad c = z^{\frac{1}{2}}.$$

En élevant au cube les deux membres de la seconde équation, on a

$$a^2x^2 + b^2y^2 + 3(ax)^{\frac{2}{3}}(by)^{\frac{2}{3}}\left[(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}}\right] = c^4;$$

en remplaçant la parenthèse par $c^{\frac{4}{3}}$, isolant dans un membre la quantité irrationnelle et élevant au cube, on obtient la relation rationnelle

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 = 27(ax)^2(by)^2c^4.$$

---

14. — *Calculer la limite de* $\dfrac{\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b}}{\sqrt[p]{a} - \sqrt[p]{b}}$ *quand* b *tend vers* a; *on posera* $a = \alpha^{mp}$ *et* $b = \beta^{mp}$.

L'expression peut se mettre sous la forme

$$\frac{\alpha^p - \beta^p}{\alpha^m - \beta^m} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^{p-1} + \alpha^{p-2}\beta + \cdots + \beta^{p-1})}{(\alpha - \beta)(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2}\beta + \cdots + \beta^{m-1})};$$

en supprimant le facteur commun $\alpha - \beta$ et passant à la limite pour $\alpha = \beta$, on obtient $\dfrac{p}{m}\alpha^{p-m} = \dfrac{p}{m}a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{p}}$.

---

15. — *Déterminer le volume d'une pyramide; on partagera sa hauteur en* n *parties égales et l'on tracera par les points de division des plans parallèles à la base; on considérera des prismes inscrits dans la pyramide, ayant pour bases supérieures les sections successives, et pour hauteur la distance de deux plans consécutifs; puis on déterminera la limite de la somme des volumes de ces prismes lorsque* n *augmente indéfiniment.*

Si B est la surface de la base et H la hauteur, les prismes successifs ont pour hauteur $\dfrac{H}{n}$; les surfaces de leurs bases sont entre elles

comme les carrés des distances au sommet, et ont pour valeur

$$B\left(\frac{1}{n}\right)^2, \quad B\left(\frac{2}{n}\right)^2, \quad \cdots \quad B\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

La somme des volumes est

$$\frac{BH}{n^3}\left[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right]=\frac{BH}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$$

en passant à la limite pour n infini, on trouve $V=\frac{BH}{3}$.

---

16. — *Étudier la convergence ou la divergence des séries dont le terme général est*

$$\frac{a}{b+cn}, \quad \frac{2+n}{1+n^3}, \quad \frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{n^\alpha}.$$

Pour la première série, le rapport de u_n à $\frac{1}{n}$ a une limite finie ; la série est divergente (n° 33) comme la série harmonique.

Pour la deuxième, le rapport de u_n à $\frac{1}{n^2}$ a une limite finie, et la série est convergente (n° 36).

Pour la troisième, on peut écrire $u_n=\frac{2}{n^\alpha}\sin^2\frac{\pi}{2n}$; le rapport de u_n à $\frac{1}{n^{\alpha+2}}$ a une limite finie, et la série est convergente (n° 36) si $\alpha+2>1$ ou $\alpha>-1$; elle est divergente si $\alpha\leqslant 1$.

---

17. — *On appelle série hypergéométrique la série*

$$1+\frac{\alpha.\beta}{\gamma.1}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)1.2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}x^3+\cdots;$$

montrer qu'elle est convergente lorsque x est inférieur à l'unité en valeur absolue.

Pour la série des valeurs absolues des termes, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (n° 34) est égal à $\left|\frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{(\gamma+n-1)n}x\right|$; il a pour limite $|x|$ quand n augmente indéfiniment; la série est donc absolument convergente quand $|x|$ est plus petit que 1.

---

18. — *Démontrer que la série dont le terme général est $q^{n^2}x^n$ est convergente quel que soit x lorsque q est inférieur à l'unité en valeur absolue.*

Pour la série des valeurs absolues des termes, l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ (n° 35) est $|q^n x|$; elle a pour limite zéro si $|q|<1$, et la série est convergente; si $|q|>1$, la série est divergente.

---

19. — *Démontrer que les séries*

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+\cdots+\frac{1}{n.2^n}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2}\frac{1}{3.2^3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5.2^5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7.2^7}+\cdots,$$

$$1-\frac{1}{1}\frac{1}{3}+\frac{1}{1.2}\frac{1}{5}-\frac{1}{1.2.3}\frac{1}{7}+\frac{1}{1.2.3.4}\frac{1}{9}-\cdots$$

sont convergentes et trouver leur somme à 1 millième près.

Les termes des deux premières séries sont respectivement inférieurs à ceux de progressions géométriques de raison $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2^2}$; ces séries sont donc convergentes; la troisième l'est aussi comme étant alternée à termes décroissants et tendant vers zéro (n° 39).

Pour le calcul de la première, R_n

$$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)2^{n+2}}+\cdots<\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)$$

et il est inférieur à $\frac{1}{(n+1)2^n}$, c'est-à-dire au double du premier terme négligé; pour $n=8$, il est inférieur à $\frac{1}{2000}$ ou 0,0005.

Des huit premiers termes conservés, trois sont calculables avec cinq chiffres décimaux exacts; en conservant dans les cinq autres termes cinq chiffres décimaux, l'erreur commise dans la somme est inférieure à 0,00005; on obtient ainsi

$$0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}04166 + 0{,}01562 + 0{,}00625 + 0{,}00260 + 0{,}00111 + 0{,}00048 = 0{,}69272.$$

Si l'on supprime les deux derniers chiffres en forçant d'une unité le chiffre 2, on commet une erreur inférieure à 0,0003; la somme de toutes les erreurs est inférieure à $\dfrac{5+3+0{,}5}{10000}$ ou à 0,001; on peut donc prendre pour valeur la somme 0,693 à 0,001 près. La série représente la valeur du logarithme népérien de 2.

Pour la deuxième série, un raisonnement analogue montre que R_n est inférieur au double du premier terme négligé; les trois premiers termes ont pour valeurs 0,5, 0,02083 ... et 0,00234 ...; le suivant est inférieur à 0,00035, et l'erreur commise en le négligeant ainsi que ceux qui viennent ensuite est plus petite que 0,0007. La somme des trois premiers pris avec cinq chiffres décimaux est 0,52317, l'erreur commise étant inférieure à 0,00002; en conservant 0,523, on commet une dernière erreur inférieure à 0,0002; finalement, on peut conserver 0,523 pour la somme de la série, avec une erreur inférieure à 0,001. La série représente la valeur de $\arcsin \frac{1}{2}$ ou $\frac{\pi}{6}$.

Pour la troisième série, les cinq premiers termes donnent

$$1 - 0{,}3333 \cdots + 0{,}1 - 0{,}0238 \cdots + 0{,}0046 \cdots;$$

le premier terme négligé est $\frac{1}{1320}$, et R_n, qui lui est inférieur (n° 40), est plus petit que 0,0008. En conservant quatre chiffres décimaux dans les nombres conservés, qui sont de signes différents, l'erreur est inférieure à 0,0002; on peut donc prendre le résultat 0,7475 comme valeur approchée de la série à 0,001 près. Cette série est la valeur de l'intégrale définie $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

20. — *Pour quelles valeurs de x la série*

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$$

est-elle convergente? Évaluer le produit par $(1-x)^2$ de la somme des n premiers termes, et en déduire que la série, lorsqu'elle est convergente, a pour somme $\frac{x}{(1-x)^2}$. Appliquer ce résultat au calcul de la somme de la série considérée au n° 40.

Pour la série des valeurs absolues, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à $\frac{n}{n-1}|x|$ et a pour limite $|x|$; la série est convergente pour $|x| < 1$ et divergente pour $|x| \geqslant 1$.

Le produit par $(1-x)^2$ de la somme S_n est égal à

$$x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}$$

et, pour $|x| < 1$, il a pour limite x quand n augmente indéfiniment; par suite la somme de la série est égale à $\frac{x}{(1-x)^2}$; (comparer à l'exercice 9).

Pour $x = \frac{1}{8}$, on a $S = \frac{8}{49} = 0{,}16326 \ldots$.

---

21. — *La longueur du périmètre d'une ellipse est donnée par la formule*

$$S = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{e^2}{1} - \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \cdots\right]$$

où a est le demi-grand axe et e l'excentricité; calculer S à un centième près pour $a = 5$ et $e = 0{,}3$.

Pour calculer avec une erreur inférieure à $0{,}01$ le produit

$$S = 10\pi \left[1 - \frac{1}{2^2} \frac{(0{,}3)^2}{1} - \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \frac{(0{,}3)^4}{3} - \cdots\right],$$

il faut tenir compte de l'erreur que l'on commet sur π et de celle que l'on commet dans le calcul de la série qui est entre parenthèses. Le nombre 10π est égal à $31{,}416 + \varepsilon$, ε étant un nombre inférieur en valeur absolue à $0{,}0001$.

La série peut s'écrire $S'_n + \varepsilon' + R_n$, R_n étant le reste, S'_n une valeur approchée de la somme des n premiers termes et ε' l'erreur commise sur ces termes; on a donc

$$S = (31{,}416 + \varepsilon)(S'_n + \varepsilon' + R_n)$$
$$= 31{,}416\, S'_n + 31{,}416(\varepsilon' + R_n) + \varepsilon(S'_n + \varepsilon' + R_n).$$

Comme la somme de la série est inférieure à l'unité, le dernier terme est inférieur à 0,0001; si l'on prend $\varepsilon' + R_n < 0{,}0003$, le produit $31{,}416(\varepsilon' + R_n)$ sera inférieur à 0,0095 et le produit $31{,}416 S'_n$ différera de S de moins de 0,01.

Remarquons que R_n est inférieur à

$$u_{n+1}(1 + e^2 + e^4 + \cdots) \qquad \text{ou} \qquad \frac{u_{n+1}}{1 - e^2};$$

comme le quatrième terme est inférieur à 0,000015, il suffit de prendre $n = 3$, et R_n est inférieur à 0,00002.

On doit calculer la somme des trois premiers termes

$$1 - \frac{0{,}09}{4} - \frac{0{,}0243}{64} = 0{,}977120\ldots;$$

en conservant 0,977, l'erreur commise ε' est inférieure à 0,00013, et l'on a finalement $\varepsilon' + R_n < 0{,}00015$.

Formons le produit $31{,}416 \times 0{,}977 = 30{,}693432$; en conservant seulement 30,69, nous commettons une erreur inférieure à 0,004 qui s'ajoute aux précédentes; mais la somme de toutes ces erreurs reste quand même inférieure à $0{,}0001 + 32 \times 0{,}00015 + 0{,}004$ ou à 0,009; la valeur 30,69 est donc bien approchée à 0,01 près.

---

22. — *Lorsque, dans une équation de la forme* $ax^p + x - c = 0$, a *est un nombre très petit, on détermine une racine par approximations successives en posant* $x = c - ax^p$, *et calculant la suite de nombres*

$$x_1 = c, \qquad x_2 = c - ax_1^p, \qquad x_3 = c - ax_2^p, \qquad \cdots;$$

démontrer que si a *et* c *sont positifs, les nombres de cette suite ont une limite, et que cette limite est racine de l'équation donnée; déter-*

miner une limite de l'erreur commise en s'arrêtant à un certain terme; appliquer cette méthode à la recherche d'une racine de l'équation

$$0{,}01\,x^3 + x - 2 = 0.$$

L'équation a une seule racine positive, car si x croît de 0 à $+\infty$, le premier membre croît de $-c$ à $+\infty$ et s'annule une et une seule fois.

Le nombre c étant supérieur à $c - ax^p$, x_1 est supérieur à la racine; en calculant x_2, on retranche de c le nombre trop grand ax_1^p, et x_2 est inférieur à la racine; x_3 est de nouveau supérieur à la racine mais plus petit que x_1; x_4 est inférieur à la racine, mais plus grand que x_2, et ainsi de suite. On a donc une suite de nombres $x_1, x_2, x_3, \ldots$, qui peuvent être représentés par les points $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de la figure 1 (n° 39). Pour montrer que cette suite a une limite, il suffit de montrer que $x_n - x_{n-1}$ tend vers zéro; la limite sera par suite égale à la racine x, car celle-ci est comprise entre deux nombres consécutifs de la suite; or on a

$$x_n - x_{n-1} = -a(x_{n-1}^p - x_{n-2}^p) = -a(x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-1}^{p-1} + x_{n-1}^{p-2}x_{n-2} + \cdots);$$

les termes de la dernière parenthèse étant inférieurs à c^{p-1}, on a

$$|x_n - x_{n-1}| < apc^{p-1}\,|x_{n-1} - x_{n-2}|;$$

si apc^{p-1} est un nombre k inférieur à l'unité, on trouve, en donnant à n les valeurs successives $3, 4, \ldots$, et faisant le produit des inégalités,

$$|x_n - x_{n-1}| < k^{n-2}|x_2 - x_1| \quad \text{ou} \quad < k^{n-2}\,ac^p,$$

ce qui montre bien que la suite des nombres x_n a une limite. L'erreur commise en s'arrêtant à x_n est inférieure à $k^{n-2}\,ac^p$.

Pour l'équation $0{,}01x^3 + x - 2 = 0$, on a

$$c = 2, \quad a = 0{,}01, \quad p = 3, \quad k = 0{,}12;$$

les valeurs successives sont

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1{,}92, \quad x_3 = 1{,}9292\ldots, \quad x_4 = 1{,}9282\ldots,$$

en prenant pour x la moyenne arithmétique de x_3 et x_4, c'est-à-dire 1,9287, on obtient une valeur approchée de x à 0,0005 près.

23. — *On démontre en mécanique que les tensions* T *et* t *aux extrémités d'une corde passant sur une poulie sont liées par la relation*

$$\frac{T}{t} = e^{f\alpha},$$

e étant la base des logarithmes népériens, α *l'arc embrassé par la corde, évalué en radians, et* f *le coefficient de frottement de la corde sur la poulie; calculer* α *lorsque l'on a* $f = 0{,}28$ *et* $T = 100t$.

La relation donnée conduit à $f\alpha = \log\frac{T}{t} = 2{,}3026\ldots\log_{10}\frac{T}{t}$; dans l'exemple, on obtient $\alpha = \frac{2{,}3026\ldots\times 2}{0{,}28} = 16{,}44\ldots$ exprimé en radians, ce qui fait environ 942° ou près de trois circonférences.

---

24. — *Trouver la limite pour* m *infini de*

$$\left(\cos\frac{\varphi}{m} + x\sin\frac{\varphi}{m}\right)^m.$$

Écrivons l'expression sous la forme $(1+\alpha)^\beta$ (n° 51), avec $\beta = m$ et

$$\alpha = \cos\frac{\varphi}{m} + x\sin\frac{\varphi}{m} - 1 = -2\sin^2\frac{\varphi}{2m} + x\sin\frac{\varphi}{m};$$

on a

$$\alpha\beta = -2\sin\frac{\varphi}{2m}\times\frac{\sin\frac{\varphi}{2m}}{\frac{\varphi}{2m}}\times\frac{\varphi}{2} + \varphi x\frac{\sin\frac{\varphi}{m}}{\frac{\varphi}{m}};$$

$\lim\alpha\beta$ est égal à φx, et la limite de l'expression est $e^{\varphi x}$.

II. — EXERCICES SUR LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

---

25. — *En assimilant la surface de la terre à celle d'une sphère de* 40 000 *kilomètres de circonférence, évaluer en kilomètres carrés la surface d'un triangle sphérique géodésique, au moyen des mesures des angles de ce triangle en grades, le grade étant la centième partie de l'angle droit.*

Si a'', b'', c'' sont les mesures des angles en grades, r'' le rayon de la terre en kilomètres et S'' sa surface en kilomètres carrés, on a, comme au n° 60,

$$a'' = 100\,a, \quad b'' = 100\,b, \quad c'' = 100\,c, \quad S'' = \frac{S\pi r''^2}{2},$$

d'où

$$S'' = \frac{\pi r''^2}{200}(a'' + b'' + c'' - 200).$$

En remplaçant r'' par $\frac{40000}{2\pi}$, on trouve

$$S'' = \frac{2}{\pi}10^6(a'' + b'' + c'' - 200).$$

---

26. — *Quelle est la valeur d'une accélération de* 5cm : sec² *lorsqu'on prend comme unité de longueur le mètre et comme unité de temps la minute?*

Si γ est la mesure donnée de l'accélération, γ' la mesure cherchée, on a

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \left(\frac{l}{l'}\right) : \left(\frac{t}{t'}\right)^2 = \left(\frac{L'_0}{L_0}\right) : \left(\frac{T'_0}{T_0}\right)^2 = 100 : \overline{60}^2,$$

d'où l'on tire

$$\gamma' = 36\gamma.$$

---

27. — *L'équivalent mécanique de la chaleur est représenté par le nombre 425 quand on prend comme unités de temps la seconde, de longueur le mètre, de force le kg-force, de quantité de chaleur la grande calorie; quelle est la valeur numérique de cette constante lorsqu'on prend pour unités de temps la seconde, de longueur le centimètre, de force la dyne, de quantité de chaleur la petite calorie?*

Soit W le travail équivalent à une quantité de chaleur Q; dans le système kilogramme-mètre-grande calorie, on a entre les mesures w et q la relation $w = 425\,q$. Soient w' et q' les mesures des mêmes quantités dans le système erg-petite calorie; on a

$$\frac{w}{w'} = \frac{W'_0}{W_0} = \frac{\text{erg}}{\text{kilogrammètre}} = \frac{1}{9{,}8067 \times 10^7}$$

et

$$\frac{q}{q'} = \frac{C'_0}{C_0} = \frac{\text{petite calorie}}{\text{grande calorie}} = \frac{1}{100};$$

par suite

$$\frac{w'}{9{,}8067 \times 10^7} = 425 \times \frac{q'}{100}.$$

L'équivalent mécanique dans le nouveau système est donc égal à

$$\frac{425 \times 9{,}8067 \times 10^7}{100} = 4{,}168 \times 10^7 \text{ ergs};$$

si l'on prend le joule à la place de l'erg, l'équivalent de la petite calorie est 4,168 joules.

---

28. — *En Angleterre on emploie comme mesures de longueur le yard, qui vaut* $91^{\text{cm}},4404$, *le foot, qui est le tiers du yard et vaut* $30^{\text{cm}},4801$, *et l'inch, qui est la douzième partie du foot et vaut* $2^{\text{cm}},5400$; *comme mesure de poids, on emploie la livre ou pound qui vaut* 453,592428 *gr. poids. On demande de déterminer:*

1° *la valeur en foot: sec² du nombre* g *qui, au centre de l'Angleterre, vaut* $981^{\text{cm}},33$; *la dimension est* $[LT^{-2}]$;

2° *la valeur en kilowatt et en cheval-vapeur du horsepower des mécaniciens, qui est la puissance de* 550 *foot-pounds par seconde; la dimension est* $P = [L^2MT^{-3}] = [FLT^{-1}]$;

3° *la valeur en dynes: cm² et en kg-poids: cm² d'une pression de*

une livre-poids : inch²; la dimension est $[L^{-1}MT^{-2}] = [FL^{-2}]$. *Quelle est la pression en kg : cm² de la vapeur dans une chaudière lorsqu'un manomètre anglais marque* 200 *livres : inch² ?*

1° Si g' est la mesure anglaise de l'accélération de la pesanteur, on a

$$\frac{g}{g'} = \left(\frac{L'_0}{L_0}\right) : \left(\frac{T'_0}{T_0}\right)^2 = \frac{\text{foot}}{\text{centimètre}} = 30{,}4801\,;$$

par suite

$$g' = \frac{981{,}33}{30{,}4801} = 31{,}195 \text{ foot : sec}^2.$$

2° Soit p la mesure d'une puissance P en chevaux-vapeurs et p' sa mesure en horsepower; la dimension étant $[FLT^{-1}]$, on a

$$\frac{p}{p'} = \frac{550}{75}\left(\frac{F'_0}{F_0}\right)\left(\frac{L'_0}{L_0}\right) : \left(\frac{T'_0}{T_0}\right) = \frac{550}{75} \times \frac{\text{pound}}{\text{kg}} \times \frac{\text{foot}}{\text{mètre}} = 1{,}014\,;$$

on en conclut $p = 1{,}014\,p'$; sa mesure p'' en kilowatt est $0{,}7355\,p = 0{,}7457\,p'$; si l'on fait $p' = 1$, on voit qu'un horsepower s'exprime par 1,014 cheval et par 0,7457 kilowatt.

3° Soient b la mesure en kg : cm² d'une pression B et b' sa mesure en pound : inch² ; on a

$$\frac{b}{b'} = \left(\frac{F'_0}{F_0}\right) : \left(\frac{L'_0}{L_0}\right)^2 = \frac{\text{pound}}{\text{kg}} : \left(\frac{\text{inch}}{\text{cm}}\right)^2 = \frac{0{,}45359}{(2{,}54)^2} = 0{,}070307.$$

Si b'' est la mesure en dynes : cm² ou en baryes, on a

$$\frac{b''}{b} = \left(\frac{F_0}{F''_0}\right) = \frac{\text{kilogramme-poids}}{\text{dyne}} = 980{,}67 \times 10^3\,;$$

par suite

$$b'' = 68948\,b'.$$

Si $b' = 200$, on voit qu'une pression de 200 pounds : inch² s'exprime par $b = 14{,}06$ kg : cm² ou par 13,79 mégabaryes.

---

29. — *Vérifier l'homogénéité de la formule des cordes vibrantes :*

$$n = \frac{1}{2rl}\sqrt{\frac{gP}{\pi d}}\,:$$

n *représente le nombre par seconde de vibrations d'une corde,* r *et*

l son rayon et sa longueur, d son poids spécifique, P *le poids tenseur, g l'accélération due à la pesanteur, et π le nombre* 3,1416

Remplaçons les lettres représentant les mesures des grandeur p l'expression des dimensions de ces grandeurs : n par T^{-1}, l par L, P par F et d par FL^{-3} ; les deux membres ont pour dimensions T^{-1} et $\frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{LT^{-2}F}{FL^{-3}}}$; ces dimensions sont bien égales.

---

30. — *Déterminer graphiquement et par le calcul la somme géométrique de deux vecteurs représentés par les deux diagonales d'un rectangle, ou de quatre vecteurs représentés par les quatre diagonales d'un parallélépipède ; examiner les divers cas qui se présentent suivant le sens de parcours de ces vecteurs ; évaluer les angles que font avec les arêtes les différentes diagonales, et les angles que ces diagonales font entre elles deux à deux.*

Nous ferons le calcul dans le cas d'un parallélépipède, celui d'un rectangle se traitant de la même manière. Prenons l'un des sommets, O, comme origine, les trois côtés $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ issus de ce sommet comme axes Ox, Oy, Oz ; désignons par O′, A′, B′, C′ les sommets opposés à O, A, B, C ; par V_1, V_2, V_3, V_4 les vecteurs OO′, AA′, BB′, CC′ et par V_1', V_2', V_3', V_4' les vecteurs O′O, A′A, B′B, C′C opposés aux premiers. Les projections des quatre premiers de ces vecteurs et les cosinus des angles qu'ils font avec les axes sont indiqués dans le tableau suivant :

	X	Y	Z	cos α	cos β	cos γ
V_1	a	b	c	μa	μb	μc
V_2	$-a$	b	c	$-\mu a$	μb	μc
V_3	a	$-b$	c	μa	$-\mu b$	μc
V_4	a	b	$-c$	μa	μb	$-\mu c$

où μ désigne $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Les quantités analogues pour les quatre derniers sont égales et opposées aux précédentes.

Lorsque l'on fait la somme de quatre de ces vecteurs dirigés cha-

cun respectivement suivant une des diagonales, on peut les associer de seize manières différentes, car on peut en effet considérer V_1 ou V'_1, lui ajouter V_2 ou V'_2, puis V_3 ou V'_3 et V_4 ou V'_4, ce qui fait $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ combinaisons possibles. Les combinaisons caractéristiques sont indiquées dans le tableau suivant :

	X	Y	Z
$V_1 + V_2 + V_3 + V_4$	$2a$	$2b$	$2c$
$V'_1 + V_2 + V_3 + V_4$	0	0	0
$V_1 + V'_2 + V_3 + V_4$	$4a$	0	0
$V_1 + V_2 + V'_3 + V'_4$	$-2a$	$2b$	$2c$

les autres s'en déduisent par permutation des lettres a, b, c et par changement des signes des trois projections à la fois. Les formules du n° 74 permettent de déterminer dans chaque cas la grandeur de la somme géométrique et les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes de projection.

Les angles des vecteurs pris deux à deux sont au nombre de 24 ; les cosinus de ces angles sont donnés par la formule

$$\cos(V_1, V_2) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

et par les formules analogues se déduisant de la précédente par le changement dans le numérateur des signes de a^2, b^2, c^2 de toutes les manières possibles, avec exclusion toutefois des combinaisons où les trois signes seraient identiques ; il n'y a donc que six valeurs distinctes des cosinus, deux à deux égales et opposées.

---

31. — *Sur les bissectrices des faces d'un trièdre trirectangle on prend à partir du sommet des vecteurs égaux à l'unité. Déterminer la somme géométrique de ces vecteurs, les angles qu'ils font deux à deux et l'angle de leur somme géométrique avec chacun d'eux.*

Soient V_1, V_2, V_3 les vecteurs égaux à l'unité dirigés respectivement suivant les bissectrices des angles yOz, zOx, xOy, et soit V

leur somme géométrique ; les projections de ces vecteurs sont respectivement

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad Z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$X_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad Y_2 = 0, \quad Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$X_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad Y_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad Z_3 = 0,$$

$$X = \sqrt{2}, \quad Y = \sqrt{2}, \quad Z = \sqrt{2}.$$

Le vecteur V est égal à $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{6}$; il fait avec les axes des angles dont les cosinus sont $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, et ces angles sont égaux à 54°44′7″. Les angles des vecteurs deux à deux sont donnés par

$$\cos(V_1, V_2) = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}} = \frac{1}{2}, \quad (V_1, V_2) = 60°,$$

$$\cos(V, V_1) = \frac{XX_1 + YY_1 + ZZ_1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad (V, V_1) = 35°15'53''.$$

---

32. — *Étant donnés des vecteurs* $V_1, V_2, \ldots,$ *démontrer que la grandeur de leur somme géométrique* V *est donnée par la formule*

$$V^2 = \Sigma V_i^2 + 2\Sigma V_i V_k \cos(V_i, V_k),$$

(V_i, V_k) *désignant l'angle des vecteurs* V_i *et* V_k.

Les formules du n° 74 donnent

$$V^2 = (\Sigma X_i)^2 + (\Sigma Y_i)^2 + (\Sigma Z_i)^2$$
$$= \Sigma(X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2) + 2\Sigma(X_iX_k + Y_iY_k + Z_iZ_k),$$

mais

$$X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 = V_i^2$$

et

$$X_iX_k + Y_iY_k + Z_iZ_k$$
$$= V_iV_k(\cos\alpha_i \cos\alpha_k + \cos\beta_i \cos\beta_k + \cos\gamma_i \cos\gamma_k) = V_iV_k \cos(V_i, V_k);$$

on a donc bien

$$V^2 = \Sigma V_i^2 + 2\Sigma V_i V_k \cos(V_i, V_k).$$

---

33. — *On dit que quatre points* A, B, C, D *situés sur un même axe sont conjugués harmoniques si l'on a la relation*

$$\frac{(CA)}{(CB)} = -\frac{(DA)}{(DB)};$$

1° *démontrer que cette relation est équivalente à l'une ou à l'autre des deux suivantes :*

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}, \qquad \overline{IA}^2 = IC \cdot ID,$$

I *désignant le milieu du segment* AB ;

2° *si les abscisses de* A *et* B *sont* x_1 *et* x_2, *celles de* C *et* D, x_3 *et* x_4, *montrer que la relation qui existe alors entre ces abscisses est*

$$2x_1x_2 + 2x_3x_4 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4),$$

3° *si* x_1 *et* x_2 *sont les racines de l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$, *et* x_3 *et* x_4 *les racines de l'équation* $a'x^2 + b'x + c' = 0$, *trouver la relation qui existe entre les coefficients de ces équations lorsque la condition précédente est remplie ;*

4° *on considère les couples de points* A *et* B *dont les abscisses sont les racines de l'équation*

$$ax^2 + bx + c + \lambda(a'x^2 + b'x + c') = 0,$$

où λ *est un paramètre variable ; montrer que l'on peut déterminer deux points fixes* C *et* D *tels que* A *et* B *soient conjugués par rapport à* C *et* D, *quelle que soit la valeur de* λ.

Les deux premières parties peuvent se démontrer géométriquement en utilisant le théorème de Chasles, mais nous allons les établir par un raisonnement algébrique.

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les abscisses des points A, B, C, D ; celle du

milieu I de AB est égale à $\frac{x_1+x_2}{2}$; les divers segments de l'énoncé ont pour valeur relative

$$(CA)=x_1-x_3, \qquad (CB)=x_2-x_3, \qquad (DA)=x_1-x_4,$$
$$(DB)=x_2-x_4, \qquad (AB)=x_2-x_1,$$
$$(IA)=x_1-\frac{x_1+x_2}{2}, \quad (IC)=x_3-\frac{x_1+x_2}{2}, \quad (ID)=x_4-\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Tout revient à démontrer que la relation de définition

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=-\frac{x_1-x_4}{x_2-x_4}$$

est équivalente à l'une des suivantes :

$$\frac{2}{x_2-x_1}=\frac{1}{x_3-x_1}+\frac{1}{x_4-x_1},$$
$$\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2=\left(x_3-\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_4-\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$
$$2(x_1x_2+x_3x_4)=(x_1+x_2)(x_3+x_4),$$

ce qui se vérifie immédiatement.

3° La dernière relation met en évidence les fonctions symétriques, somme et produit, des racines des deux équations, et elle est équivalente à

$$2\left(\frac{c}{a}+\frac{c'}{a'}\right)=\frac{b}{a}\frac{b'}{a'}, \qquad \text{ou} \qquad 2(ac'+ca')-bb'=0.$$

4° Pour la dernière partie, en désignant par x_1, x_2 les abscisses des points A et B, par x_3, x_4 celles des points C et D, on doit avoir

$$2\frac{c+\lambda c'}{a+\lambda a'}+2x_3x_4=-\frac{b+\lambda b'}{a+\lambda a'}(x_3+x_4)$$

ou $$2(c+\lambda c')+2x_3x_4(a+\lambda a')+(x_3+x_4)(b+\lambda b')=0.$$

Pour écrire que cette relation a lieu quel que soit λ, on doit annuler séparément le coefficient de λ et le terme indépendant, ce qui donne

$$2c+2ax_3x_4+b(x_3+x_4)=0,$$
$$2c'+2a'x_3x_4+b'(x_3+x_4)=0,$$

d'où $$x_3 + x_4 = -\frac{2(ac' - ca')}{ab' - ba'}, \qquad x_3x_4 = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'};$$

on en conclut que x_3 et x_4 sont les racines de l'équation

$$(ab' - ba')X^2 + 2(ac' - ca')X + (bc' - cb') = 0.$$

On peut encore obtenir ces résultats en cherchant les coefficients nconnus d'une équation, $AX^2 + BX + C = 0$, ayant pour racines x_3 et x_4; ils doivent satisfaire à la condition

$$2A(c + \lambda c') + 2C(a + \lambda a') - B(b + \lambda b') = 0$$

quel que soit λ, c'est-à-dire aux relations

$$2Ac - Bb + 2Ca = 0, \qquad 2Ac' - Bb' + 2Ca' = 0;$$

on retrouve ainsi les valeurs de A, B, C déjà calculées. En éliminant A, B, C entre ces deux équations et celle qui doit donner X, on écrit cette dernière sous la forme

$$\begin{vmatrix} X^2 & X & 1 \\ 2c & -b & 2a \\ 2c' & -b' & 2a' \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. — Si l'on considère la courbe représentative de la fraction du deuxième degré

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'},$$

les projections sur Ox des points de rencontre de cette ligne avec la droite parallèle à Ox et d'ordonnée $y = -\lambda$ sont les points A et B. On voit que ces points sont toujours conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes C et D; l'équation qui fournit ces derniers est précisément celle qui donne les valeurs de x rendant y maximum ou minimum.

---

34. — *Soient* A *et* B *deux points de coordonnées* (x_1, y_1) *et* (x_2, y_2), *et* C *un point situé sur* AB *tel que l'on ait* $\frac{AC}{CB} = \lambda$; *montrer que les coordonnées du point* C *sont données par les formules*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};$$

on obtient ainsi, lorsque λ *varie, l'expression des coordonnées des points successifs de la droite indéfinie* AB; *déduire de là en particulier les coordonnées du milieu du segment* AB.

Les projections sur un axe des vecteurs AC et CB sont dans le même rapport que les valeurs relatives de ces vecteurs; on a par suite

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{AC}{CB} = \lambda,$$

d'où $$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Pour $\lambda = 1$, on trouve $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, coordonnées du milieu de AB.

---

35. — *Déterminer l'équation du lieu des points équidistants de deux points donnés.*

Le lieu des points (x, y) équidistants des deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) a pour équation

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

ou $$2x(x_1 - x_2) + 2y(y_1 - y_2) - [x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2] = 0.$$

En écrivant cette équation sous la forme

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)(x_1 - x_2) + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)(y_1 - y_2) = 0,$$

on voit qu'elle représente une droite passant par le milieu du segment joignant les deux points donnés et perpendiculaire à ce segment.

---

36. — *Étant donnée une circonférence de diamètre* OA, *et la tangente* AT *à cette circonférence au point* A, *on mène par le point* O *une sécante variable qui coupe la circonférence au point* B *et la tangente* AT *au point* C, *et l'on prend sur cette sécante un vecteur* OM *égal à* BC; *en prenant le point* O *comme origine et* OA *comme axe des* x, *trouver en coordonnées polaires l'équation du*

lieu du point M, *et transformer cette équation en coordonnées catésiennes.*

Si a est la mesure du diamètre OA du cercle, on a $OC = \frac{a}{\cos\theta}$, $OB = a\cos\theta$, et l'équation cherchée est

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} - a\cos\theta = \frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

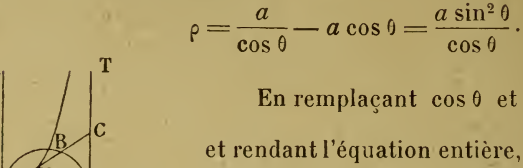


Fig. 1.

En remplaçant $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par $\frac{x}{\rho}$ et $\frac{y}{\rho}$, et rendant l'équation entière, on obtient l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes

$$(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0.$$

La courbe a la forme de la figure 1 et s'appelle *cissoïde*.

---

37. — *Étant donnés sur l'axe des* x *un point* A *d'abscisse* 2 *et sur l'axe des* y *un point* B *d'ordonnée* 3, *on mène par le point* B *une droite faisant avec l'axe des* x *un angle de* 120° *et par le point* A *une perpendiculaire à cette droite; écrire les équations de ces droites et trouver les coordonnées de leur point de rencontre.*

Les équations des deux droites sont

$$y - 3 = -\sqrt{3}\,x, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2);$$

les coordonnées de leur point de rencontre sont

$$x = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{4}, \qquad y = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{4}.$$

---

38. — *Montrer que la condition pour que trois droites représentées par les équations*

$$Ax + By + C = 0, \qquad A'x + B'y + C' = 0, \qquad A''x + B''y + C'' = 0$$

se coupent au même point est

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit d'appliquer ce qui a été dit au nº 13 sur l'élimination de deux inconnues x et y entre trois équations linéaires.

Désignons par D, D′, D″ les premiers membres des équations des trois droites ; on vérifie aussi que ces droites sont concourantes en constatant qu'il est possible de trouver trois nombres $\lambda, \lambda', \lambda''$ tels que $\lambda D + \lambda' D' + \lambda'' D''$ soit identiquement nul ; la solution de $D = 0$ et $D' = 0$ annule en effet D''.

---

39. — *Connaissant les coordonnées des sommets d'un triangle dans le plan xOy, déterminer les coordonnées du centre de gravité, ainsi que les longueurs des côtés et les angles de ce triangle ; écrire les équations des côtés, des perpendiculaires aux milieux des côtés, des médianes et des hauteurs du triangle ; vérifier que les droites de chacun des trois derniers systèmes sont concourantes.*

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ les coordonnées des trois sommets A, B, C du triangle ; celles des milieux A′, B′, C′ des côtés sont

$$\left(x'_1 = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y'_1 = \frac{y_2 + y_3}{2}\right), \qquad \left(x'_2 = \frac{x_3 + x_1}{2}, \quad y'_2 = \frac{y_3 + y_1}{2}\right),$$

$$\left(x'_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y'_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Le centre de gravité G partage le segment AA′ dans le rapport 2, et, d'après le problème nº 34, ses coordonnées sont

$$\xi = \frac{x_1 + 2x'_1}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad \eta = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \qquad \zeta = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Les longueurs des côtés sont

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}, \qquad CA = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2},$$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Pour déterminer l'angle A, il est avantageux de calculer le cosinus de l'angle des deux directions AB, AC ; il est donné par la formule

$$\cos A = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}},$$

les radicaux étant pris avec le signe +. On pourrait aussi trouver la tangente de l'angle de ces deux droites par la formule du n° 85,

$$\operatorname{tg} A = \frac{m' - m}{1 + mm'} \quad \text{où } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad m' = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1};$$

et l'on trouverait, de cette façon, tous calculs faits,

$$\operatorname{tg} A = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)};$$

mais l'angle compris entre 0 et π donné par cette formule n'est pas toujours l'angle A du triangle, il peut être son supplément.

L'équation de BC est

$$\frac{y - y_2}{y_3 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}, \quad \text{ou} \quad x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + x_2 y_3 - y_2 x_3 = 0;$$

on peut encore l'écrire sous forme de déterminant (n° 82).

L'équation de la perpendiculaire au milieu de BC est

$$(x - x_1')(x_3 - x_2) + (y - y_1')(y_3 - y_2) = 0$$

$$\text{ou} \quad D_1 = 2x(x_2 - x_3) + 2y(y_2 - y_3) - (x_2^2 + y_2^2 - x_3^2 - y_3^2) = 0,$$

comme on pouvait le voir aussi d'après le problème n° 35.

La médiane AA' a pour équation

$$\frac{y - y_1}{y_1' - y_1} = \frac{x - x_1}{x_1' - x_1},$$

$$\text{ou} \quad M_1 = x(2y_1 - y_2 - y_3) - y(2x_1 - x_2 - x_3) + x_1(y_2 + y_3) - y_1(x_2 + x_3) = 0.$$

La hauteur abaissée du sommet A sur BC a pour équation

$$(x - x_1)(x_3 - x_2) + (y - y_1)(y_3 - y_2) = 0$$

$$\text{ou} \quad H_1 = x(x_2 - x_3) + y(y_2 - y_3) - x_1(x_2 - x_3) - y_1(y_2 - y_3) = 0;$$

on écrirait de même les équations des autres droites de l'énoncé par permutation circulaire des indices.

Pour démontrer que les trois droites d'un même système sont concourantes, on peut appliquer la règle du problème précédent ou bien encore la remarque faite à ce sujet. On vérifie que les premiers membres des équations satisfont identiquement aux égalités

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0, \qquad M_1 + M_2 + M_3 = 0, \qquad H_1 + H_2 + H_3 = 0,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

---

40. — *Déterminer le lieu des points équidistants de deux droites données ; en déduire les équations des bissectrices de l'angle de ces deux droites et de son supplément.*

Faisons d'abord la remarque suivante : lorsque l'on utilise la formule 15 du n° 86 pour trouver la distance d'un point à une droite, il faut écrire

$$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

et choisir un signe convenable suivant la position du point (x_0, y_0). Lorsque ce point se déplace dans le plan, le numérateur ne peut changer de signe qu'en s'annulant, c'est-à-dire lorsque le point se trouve sur la droite ; si l'on suppose par exemple B différent de zéro, la quantité $Ax_0 + By_0 + C$ a le signe de B quand y_0 est très grand et positif ; elle a le signe contraire à B quand y_0 est très grand en valeur absolue mais négatif ; on voit donc que l'on obtient d en prenant dans la formule le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que le point est dans l'une ou dans l'autre des deux régions du plan séparées par la droite, et l'on peut toujours, d'après ce qui précède, déterminer le signe qui convient à une région.

Cela posé, le lieu des points équidistants des deux droites d'équations

$$Ax + By + C = 0, \qquad A'x + B'y + C' = 0$$

est l'ensemble des points (x_0, y_0) satisfaisant à l'une ou l'autre des équations

$$\pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x_0 + B'y_0 + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

Les quatre combinaisons des signes fournissent seulement deux équations distinctes, l'une représentant la bissectrice d'un des angles des deux droites et de son opposé par le sommet; l'autre représentant la bissectrice des deux angles supplémentaires des premiers.

---

41. — *Former l'équation d'une droite en coordonnées polaires : on donne la longueur p de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite, et l'angle ω de cette perpendiculaire avec Ox.*

En projetant le rayon vecteur d'un point de la droite donnée sur la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite, on obtient l'équation

$$\rho \cos(\theta - \omega) = p;$$

on en déduit l'équation en coordonnées cartésiennes

$$x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0,$$

que l'on appelle forme normale de l'équation de la droite.

---

42. — *Déterminer l'angle des deux droites représentées par l'équation*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0;$$

condition pour qu'elles soient rectangulaires.

Les coefficients angulaires m', m'' des deux droites sont les racines de l'équation

$$Cm^2 + 2Bm + A = 0.$$

On en déduit, d'après la formule du n° 85,

$$m'm'' = \frac{A}{C}, \qquad m' - m'' = \frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{C}, \qquad \operatorname{tg} V = \frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A + C}.$$

Pour que les deux droites soient rectangulaires, il faut et il suffit que $A + C = 0$.

---

43. — *Former l'équation d'une circonférence de rayon* R *passant par l'origine, et dont le centre est sur la bissectrice de l'angle* xOy.

Les coordonnées du centre sont $x_0 = y_0 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$; l'équation de la circonférence est

$$x^2 + y^2 - R\sqrt{2}\,x - R\sqrt{2}\,y = 0.$$

---

44. — *Étant donnée la droite représentée par l'équation*

$$x + y - 1 = 0,$$

trouver le lieu des points dont le carré de la distance à cette droite est égal au produit des distances du même point aux deux axes, et construire ce lieu.

Le carré de la distance d'un point (x, y) à la droite est égal à $\frac{(x+y-1)^2}{2}$; si le point est dans le premier ou le troisième quadrant, ses coordonnées x et y sont de même signe et le produit de ses distances aux deux axes est égal à xy. L'équation du lieu est

$$\frac{(x+y-1)^2}{2} = xy, \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0\,;$$

elle représente un cercle dont le centre a pour coordonnées 1, 1, et dont le rayon est égal à 1 ; c'est le cercle tangent aux deux axes de coordonnées aux points où ils sont rencontrés par la droite donnée.

Si le point est dans le deuxième ou le quatrième quadrant, ses coordonnées sont de signes contraires et le produit de ses distances aux deux axes est égal à $-xy$; l'équation du lieu est

$$\frac{(x+y-1)^2}{2} = -xy \quad \text{ou} \quad x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0\,;$$

elle représente une hyperbole dont le centre a pour coordonnées $x = y = \frac{1}{3}$; les coefficients angulaires des asymptotes de la courbe sont égaux à $-2 \pm \sqrt{3}$, et cette hyperbole est tangente aux deux axes de coordonnées aux points où ils sont rencontrés par la droite donnée.

---

45. — *Trouver le lieu des points d'un plan dont la somme des carrés des distances à n points donnés dans ce plan est constante.*

Si (x_1, y_1), (x_2, y_2) · · · · · sont les coordonnées des points donnés et k^2 la constante donnée, l'équation du lieu est

$$\Sigma (x - x_i)^2 + \Sigma (y - y_i)^2 = k^2$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2\frac{\Sigma x_i}{n} x - 2\frac{\Sigma y_i}{n} y + \frac{\Sigma (x_i^2 + y_i^2) - k^2}{n} = 0 ;$$

elle représente une circonférence. Le centre est un point dont les coordonnées sont les moyennes arithmétiques des coordonnées des points donnés ; il s'appelle centre des moyennes distances de ces points. Le carré du rayon est

$$R^2 = \frac{k^2}{n} + \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 + \left(\frac{\Sigma y_i}{n}\right)^2 - \frac{\Sigma (x_i^2 + y_i^2)}{n}.$$

---

46. — *Quelle relation doit-il exister entre les coefficients des équations de deux cercles, écrites sous la forme*

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0,$$

pour que ces cercles soient orthogonaux? On écrira que le carré de la distance des centres est égal à la somme des carrés des rayons.

Les coordonnées des centres sont (a, b) et (a', b') ; les carrés des rayons sont $a^2 + b^2 - c$ et $a'^2 + b'^2 - c'$; la condition cherchée est

$$(a - a')^2 + (b - b')^2 = a^2 + b^2 - c + a'^2 + b'^2 - c'$$

ou

$$2aa' + 2bb' - c - c' = 0.$$

---

47. — *Étant donnés sur l'axe des x deux points A et A' symétriques par rapport à O, trouver le lieu des points du plan dont le rapport des distances à A et A' est égal à k ; ce lieu est une circonférence. Montrer que lorsque k varie, les circonférences obtenues coupent l'axe des y en deux points fixes imaginaires, et*

qu'elles sont orthogonales à toutes les circonférences passant par A et A'. Les points A et A' sont appelés les points limites du premier faisceau de circonférences.

Soient a et $-a$ les abscisses des points A et A'; l'équation du lieu est

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}=k.$$

Cette équation, rendue entière, peut être écrite sous la forme

$$x^2+y^2-2a\frac{1+k^2}{1-k^2}x+a^2=0\,;$$

elle représente une circonférence ; les ordonnées des points où elle coupe l'axe des y s'obtiennent en faisant $x=0$, d'où $y^2+a^2=0$, $y=\pm ai$; ce sont deux points fixes imaginaires.

Une circonférence passant par A et A' a pour équation

$$x^2+y^2-2y_0y-a^2=0,$$

y_0 étant l'ordonnée de son centre: on constate, d'après le problème précédent, qu'elle est orthogonale à une quelconque des circonférences trouvées préeédemment.

---

48. — *Montrer que la projection d'une circonférence sur un plan qui ne lui est pas parallèle est une ellipse; on supposera que le plan de projection passe par le centre du cercle, on prendra ce centre pour origine, l'axe des x dirigé suivant le diamètre du cercle situé dans le plan, l'axe des y suivant la projection du diamètre perpendiculaire à celui-là et l'on déterminera l'équation de la projection de la circonférence rapportée à ces axes. Déduire de là la valeur de l'aire de l'ellipse.*

Soient a le rayon du cercle, V l'angle de son plan avec le plan de projection ; l'ordonnée y_1 d'un point du cercle dans son plan et l'ordonnée y de la projection de ce point sont telles que l'on ait $y=y_1\cos V$. Comme on a $x^2+y_1^2=a^2$, on en conclut

$$x^2+\frac{y^2}{\cos^2 V}=a^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2\cos^2 V}-1=0\,;$$

cette équation est celle d'une ellipse dont les demi-axes sont a et $b = a \cos V$.

L'aire du cercle étant πa^2, celle de sa projection (n 75) sera $\pi a^2 \cos V = \pi ab$; c'est la valeur de l'aire de l'ellipse.

---

49. — *Former l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires en prenant comme pôle le centre de la courbe. Montrer que si* ρ_1 *et* ρ_2 *sont deux rayons vecteurs rectangulaires de la courbe, on a*

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Il suffit de remplacer dans l'équation de l'ellipse x et y par $\rho \cos \theta$ et $\rho \sin \theta$, ce qui fournit l'équation cherchée ; on peut l'écrire

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2};$$

en calculant les valeurs de ρ_1^2 et ρ_2^2 relatives à deux angles θ_1 et $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$, on vérifie la relation donnée dans l'énoncé.

---

50. — *Quelle est la courbe dont les points ont des coordonnées représentées en fonction du paramètre* φ *par les équations*

$$x = \frac{a}{\cos \varphi}, \qquad y = b \operatorname{tg} \varphi ?$$

On effectue l'élimination de φ entre les équations données en utilisant la relation $\frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi$; on obtient ainsi l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

qui représente une hyperbole.

---

51. — *Une sécante coupe une hyperbole en deux points* A *et* B, *et les asymptotes en deux points* A′ *et* B′ ; *démontrer que les*

milieux des segments AB *et* A′B′ *sont confondus, par suite, que* AA′ *et* BB′ *sont des segments égaux et de sens contraires. Déduire de là une construction par points d'une hyperbole dont on connaît les asymptotes et un point* A, *en faisant tourner une sécante autour de ce point et en construisant chaque fois le deuxième point de la courbe situé sur la sécante.*

Soient

$$(\mathrm{H})\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0\,; \qquad (\mathrm{A})\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

l'équation d'une hyperbole et celle de ses asymptotes ; soit $y=mx+h$ l'équation d'une sécante. Les abscisses de ses points de rencontre A et B avec l'hyperbole et celles de ses points de rencontre A′ et B′ avec le asymptotes sont les racines des deux équations

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+h)^2}{b^2}-1=0, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+h)^2}{b^2}=0.$$

La demi-somme des racines de la première est l'abscisse du milieu de AB ; celle des racines de la seconde est l'abscisse du milieu de A′B′ ; comme ces valeurs sont égales, la proposition est démontrée.

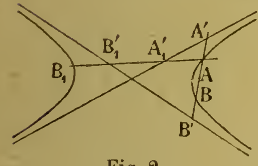


Fig. 2.

La figure 2 indique la construction d'un point B ou d'un point B_1 de l'hyperbole situés sur une sécante issue d'un point connu A ; on prend $B'B=AA'$, ou $B'_1B_1=AA'_1$; cette construction s'applique aux points d'une branche aussi bien qu'à ceux de l'autre branche de l'hyperbole.

---

52. — *Exprimer en fonction de* a *et de l'excentricité* e *les quantités* b *et* c *dans le cas d'une ellipse et dans celui d'une hyperbole. Dans le dernier cas, déterminer en fonction de* e *le demi-angle des asymptotes.*

Dans une ellipse, on a $c=ae$, $b=a\sqrt{1-e^2}$; dans une hyperbole, on a $c=ae$, $b=a\sqrt{e^2-1}$, et le demi-angle des asymptotes

a pour tangente $\sqrt{e^2 - 1}$; e est égal à $\sqrt{2}$ dans le cas d'une hyperbole équilatère.

---

53. — *Étant donnés dans l'espace deux points* A *et* B *de coordonnées* (x_1, y_1, z_1) *et* (x_2, y_2, z_2), *les coordonnées du point* C *de la droite* AB *tel que* $\frac{AC}{CB} = \lambda$ *ont pour valeurs*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda};$$

on a ainsi, quand λ *varie, l'expression des coordonnées des points successifs de* AB. *Déduire de là les coordonnées du milieu de* AB.

La solution est analogue à celle de l'exercice 34.

---

54. — *Étant donnés dans l'espace trois points* A, B, C *de coordonnées* (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), *montrer que les coordonnées d'un point* D *du plan* ABC *ont pour valeurs*

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \qquad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3},$$

$$z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3};$$

déduire de là l'équation du plan passant par les trois points A, B *et* C.

Soit A′ un point de la droite BC tel que $\frac{BA'}{A'C} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$; les coordonnées de ce point sont, d'après le problème précédent,

$$x'_1 = \frac{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_2 + \lambda_3}, \qquad y'_1 = \frac{y_2 \lambda_2 + y_3 \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3}, \qquad z'_1 = \frac{\lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_2 + \lambda_3}.$$

Soit D un point de la droite AA′ tel que $\frac{AD}{DA'} = \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1}$; d'après les mêmes formules, les coordonnées de D sont

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + (\lambda_2 + \lambda_3) x'_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3},$$

de même y et z.

Lorsque $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ varient, on obtient les coordonnées des points du plan défini par A, B, C; pour trouver l'équation de ce plan, il suffit d'éliminer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ entre les trois équations mises sous la forme

$$\begin{aligned}
\lambda_1 (x - x_1) + \lambda_2 (x - x_2) + \lambda_3 (x - x_3) &= 0, \\
\lambda_1 (y - y_1) + \lambda_2 (y - y_2) + \lambda_3 (y - y_3) &= 0, \\
\lambda_1 (z - z_1) + \lambda_2 (z - z_2) + \lambda_3 (z - z_3) &= 0,
\end{aligned}$$

ce qui conduit à l'équation

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x - x_2 & x - x_3 \\ y - y_1 & y - y_2 & y - y_3 \\ z - z_1 & z - z_2 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En retranchant la première colonne de chacune des autres, on l'écrit encore

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_1 - x_2 & x_1 - x_3 \\ y - y_1 & y_1 - y_2 & y_1 - y_3 \\ z - z_1 & z_1 - z_2 & z_1 - z_3 \end{vmatrix} = 0;$$

on peut constater qu'elle est identique à celle que l'on déduirait des considérations du n° 114.

---

55. — *Montrer que les équations*

$$\begin{aligned}
x &= a \cos\varphi + a' \sin\varphi, \\
y &= b \cos\varphi + b' \sin\varphi, \\
z &= c \cos\varphi + c' \sin\varphi,
\end{aligned}$$

représentent une courbe plane du second degré; déterminer le plan de la courbe, et ses projections sur les plans de coordonnées.

Toute combinaison des équations données indépendante de φ fournit l'équation d'une surface renfermant la courbe. Si l'on considère $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ comme deux quantités variables, et si l'on porte dans une des équations leurs valeurs tirées des deux autres, on obtient le même résultat qu'en éliminant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ entre les trois équations envisagées comme linéaires; le résultat (n° 13) est l'équation

$$\begin{vmatrix} x & a & a' \\ y & b & b' \\ z & c & c' \end{vmatrix} = 0;$$

elle représente un plan passant par l'origine et renfermant la courbe.

Pour obtenir les projections de la courbe sur les plans de coordonnées, il faut éliminer φ entre les équations prises deux à deux ; on les résout par rapport à $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ et on égale à l'unité la somme des carrés de ces deux quantités. Pour la projection sur le plan xOy, on obtient ainsi l'équation

$$(bx - ay)^2 + (b'x - a'y)^2 = (ab' - ba')^2,$$

qui représente une ligne du second ordre ; la ligne dans l'espace est aussi du second ordre ; elle a pour centre l'origine, car à chaque point M (x, y, z) donné par φ correspond un point M' de coordonnées $(-x, -y, -z)$ donné par $\varphi + \pi$ et symétrique du premier par rapport au point O.

Dans le cas particulier où l'on a $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, on constate que l'on a $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, et la ligne se réduit à une portion de droite.

---

56. — *On considère dans l'espace la courbe définie par les équations*

$$x = \cos t + \sqrt{3} \sin t,$$
$$y = \cos t - \sqrt{3} \sin t,$$
$$z = -2 \cos t;$$

démontrer qu'elle est une circonférence ayant pour centre l'origine des coordonnées ; déterminer son rayon et son plan. Former les équations de ses projections sur les plans de coordonnées. Quelle relation doit-il exister entre les paramètres t *et* t' *de deux points* M *et* M' *pour que les rayons aboutissant à ces points soient rectangulaires ?*

Ce problème est un cas particulier du précédent ; la courbe est contenue dans un plan ayant pour équation $x + y + z = 0$.

La distance d'un point de la courbe à l'origine est égale à

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{6};$$

elle est constante, par suite la courbe est un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{6}$. Les équations de ses projections sur les trois plans de coor-

données sont

$$x^2 + y^2 + xy = 3, \qquad y^2 + z^2 + yz = 3, \qquad x^2 + z^2 + xz = 3.$$

L'angle de deux rayons aboutissant aux deux points (x, y, z) et (x', y', z') a un cosinus donné par

$$\cos V = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \cos(t' - t);$$

pour que ces rayons soient rectangulaires, il faut et il suffit que

$$t' = t + (2k + 1)\frac{\pi}{2},$$

k étant un nombre entier, positif, nul ou négatif.

---

57. — *Montrer que l'on obtient l'équation du cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice la courbe d'intersection de deux surfaces représentées par les équations*

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

en rendant ces équations homogènes, c'est-à-dire en remplaçant x, y, z par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, puis en éliminant t entre les deux équations. Comme application, trouver l'équation du cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice le cercle représenté par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \qquad x + y + z - R = 0.$$

Soient P un point de la directrice, de coordonnées (x, y, z), et M un point de coordonnées (x_1, y_1, z_1) situé sur la droite OP tel que $\frac{OM}{OP} = t$; on a

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = t;$$

lorsque t varie, on obtient tous les points de la droite OP. Pour trouver le lieu de tous ces points quand P varie, on doit remplacer x, y, z par $\frac{x_1}{t}$, $\frac{y_1}{t}$, $\frac{z_1}{t}$ dans les équations de la ligne et éliminer t entre les deux équations ; on peut supprimer l'indice 1 dans le résultat.

Dans le cas donné comme exemple, on doit éliminer t entre les équations

$$x^2+y^2+z^2-R^2t^2=0, \qquad x+y+z-Rt=0,$$

et l'on trouve comme résultat

$$yz+zx+xy=0.$$

---

58. — *Démontrer que toute section plane d'un cône de révolution se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe suivant une conique ayant pour foyer le point de rencontre de l'axe et du plan de projection.*

Si l'on prend comme origine le sommet et comme axe Oz l'axe du cône, et si V est le demi-angle au sommet, l'équation de la génératrice méridienne dans le plan des xz est $z=x\operatorname{cotg} V$; l'équation de la surface de révolution (nº 107) est alors

$$z^2=(x^2+y^2)\operatorname{cotg}^2 V.$$

On peut supposer le plan sécant parallèle à l'axe Oy; il coupe le plan xOy suivant une droite dont nous appellerons l'abscisse a; si φ est l'angle qu'il fait avec Oz, l'équation de ce plan est

$$z=(x-a)\operatorname{cotg}\varphi.$$

La projection sur le plan xOy de la courbe d'intersection du cône et du plan a pour équation

$$(x-a)^2\operatorname{cotg}^2\varphi=(x^2+y^2)\operatorname{cotg}^2 V;$$

elle exprime que les distances MO et MH d'un point M de cette projection à l'origine et à la droite d'équation $x-a=0$ sont telles que l'on ait

$$\frac{\overline{MO}^2}{\overline{MH}^2}=\frac{x^2+y^2}{(x-a)^2}=\frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{\operatorname{cotg}^2 V};$$

par conséquent (nºs 92, 96, 97) cette projection est une conique ayant pour foyer le sommet du cône et pour directrice la trace du plan sécant sur le plan mené par ce sommet perpendiculairement à l'axe. L'excentricité a pour valeur $e=\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\operatorname{cotg} V}$; suivant que φ est supérieur,

inférieur ou égal à V, la conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

On arrive au même résultat en transformant l'équation de la projection en coordonnées polaires ; on obtient

$$(\rho \cos \theta - a)^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi = \rho^2 \operatorname{cotg}^2 V, \qquad \rho = \frac{a \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{tg} V}{\pm 1 + \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{tg} V \cos \theta}.$$

---

59. — *Une surface réglée est définie par les équations*

$$x = (a + z) \cos t, \qquad y = (a - z) \sin t,$$

t étant un paramètre variable. Former l'équation de cette surface et étudier ses sections par des plans parallèles au plan xOy.

L'équation de la surface, obtenue en éliminant t entre les équations données, est

$$\frac{x^2}{(a+z)^2} + \frac{y^2}{(a-z)^2} = 1 ;$$

la section par un plan d'équation $z = h$ est une ellipse de demi-axes $|a + h|$ et $|a - h|$; comme cas particuliers : pour $h = 0$, la section par le plan des xy est un cercle ; pour $h = a$, elle est une droite double parallèle à Ox ; pour $h = -a$, une droite double parallèle à Oy.

On obtient le même résultat en remarquant que pour z donné les équations définissent les coordonnées des points d'une ellipse en fonction du paramètre angulaire t (n° 92).

---

60. — *Déterminer les coordonnées du centre de gravité d'un triangle ou d'un tétraèdre dans l'espace.*

Les coordonnées du centre de gravité G d'un triangle de sommets $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ se déduisent des formules de l'exercice 54 par un calcul analogue à celui de l'exercice 39, et sont

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad \eta = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \qquad \zeta = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Si l'on forme un tétraèdre ayant pour sommets les trois points précédents et un quatrième point $A_4(x_4, y_4, z_4)$, le centre de gravité G'

de ce tétraèdre est situé sur la droite GA_4, et partage cette droite en deux segments A_4G' et $G'G$ de rapport 3 ; on a de cette façon

$$\xi' = \frac{x_4 + 3\xi}{4} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{\Sigma x_1}{4}, \qquad \eta' = \frac{\Sigma y_1}{4}, \qquad \zeta' = \frac{\Sigma z_1}{4}.$$

---

61. — *Trouver le lieu des points de l'espace équidistants de deux points donnés ou de trois points donnés.*

Trouver le lieu des points équidistants de deux plans donnés ou de trois plans donnés.

Trouver le lieu des points équidistants de deux droites données.

Soient des points donnés $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, et soit $A(x, y, z)$ un point de l'espace ; d'après la formule du n° 103 donnant le carré de la distance de deux points, le lieu des points A équidistants de A_1 et A_2 est représenté par l'équation

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2,$$

qui se réduit à

$$(x_1 - x_2)\left[x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right] + (y_1 - y_2)\left[y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right] + (z_1 - z_2)\left[z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right] = 0;$$

elle représente le plan passant par le milieu de la droite A_1A_2 et perpendiculaire à cette droite (n° 113).

Si l'on joint à cette équation celle du plan perpendiculaire à la droite A_1A_3 en son milieu, analogue à la précédente, on obtient les équations de la droite, lieu des points équidistants des trois points A_1, A_2, A_3 ; elle est perpendiculaire au plan du triangle de ces trois points, et passe par le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Soient

$$A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les équations de trois plans P_1, P_2, P_3 ; d'après la formule du n° 116, un point $A(x, y, z)$ sera équidistant des deux plans P_1 et P_2 ; si l'on a

$$\text{Valeur abs. de } \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \text{Valeur abs. de } \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}};$$

suivant les signes des radicaux, cette équation est équivalente à l'une ou l'autre des équations comprises dans la formule

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}};$$

ces équations se réduisent à deux distinctes et représentent les deux plans bissecteurs des dièdres formés par les plans P_1 et P_2.

Le lieu des points équidistants des trois plans P_1, P_2, P_3 est représenté par l'ensemble des équations

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{A_3x + B_3y + C_3z + D_3}{\pm\sqrt{A_3^2 + B_3^2 + C_3^2}};$$

comme on peut toujours fixer le signe du premier radical sans modifier le système de ces équations, on voit qu'il y a seulement quatre combinaisons possibles des signes, à chacune desquelles correspond une droite ; les quatre droites ainsi obtenues sont celles suivant lesquelles se coupent trois des plans bissecteurs des dièdres formés par les trois plans ; ce sont les lieux des centres des sphères inscrites dans ces trièdres.

Soient enfin D_1 et D_2 deux droites représentées par les équations

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1} \quad \text{et} \quad \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2};$$

le carré de la distance d'un point (x, y, z) à la première de ces droites (n° 116) est

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \frac{[a_1(x - x_1) + b_1(y - y_1) + c_1(z - z_1)]^2}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2};$$

en égalant cette expression à celle que l'on peut former d'une manière analogue pour la deuxième droite, on obtient l'équation du lieu ; elle est du deuxième degré et peut s'écrire sous la forme $P = QR$, avec

$$P = 2(x_1 - x_2)\left[x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right] + 2(y_1 - y_2)\left[y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right] + 2(z_1 - z_2)\left[z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right],$$

$$\frac{Q-R}{2}=\frac{a_1(x-x_1)+b_1(y-y_1)+c_1(z-z_1)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$$

$$\frac{Q+R}{2}=\frac{a_2(x-x_2)+b_2(y-y_2)+c_2(z-z_2)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}};$$

la surface qu'elle représente est du deuxième ordre et du genre paraboloïde hyperbolique.

---

62. — *Montrer que pour que quatre plans représentés par des équations de la forme*

$$Ax+By+Cz+D=0$$

aient un point commun, il faut que le déterminant formé par les coefficients de x, y, z *et les termes connus dans ces équations soit nul.*

En raisonnant comme dans l'exercice 38, il faut que les équations des quatre plans, considérées comme linéaires à trois inconnues x, y, z, soient satisfaites par un même système de valeurs de ces inconnues; par conséquent (n° 15) le déterminant des coefficients et des termes connus doit être nul.

---

63. — *Par deux droites* D *et* D′ *on fait passer des plans* P *et* P′ *assujettis à la condition d'être perpendiculaires. Lieu de la droite d'intersection de ces deux plans. Cas où* D *et* D′ *sont deux droites concourantes.*

Il y a avantage à représenter les droites D et D′ la première comme intersection de deux plans P_1 et P_2, la seconde comme intersection de deux autres plans P_1' et P_2'; d'après le n° 115, les équations des plans P et P′ sont respectivement de la forme

$$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)z+(D_1+\lambda D_2)=0,$$
$$(A_1'+\lambda' A_2')x+(B_1'+\lambda' B_2')y+(C_1'+\lambda' C_2')z+(D_1'+\lambda' D_2')=0.$$

La condition pour qu'ils soient rectangulaires est (n° 113)

$$(A_1+\lambda A_2)(A_1'+\lambda' A_2')$$
$$+(B_1+\lambda B_2)(B_1'+\lambda' B_2')+(C_1+\lambda C_2)(C_1'+\lambda' C_2')=0;$$

on aura l'équation du lieu en éliminant λ et λ' entre les trois équations précédentes ; le résultat est une équation du second degré, que l'on peut écrire d'une manière abrégée sous la forme

$$\alpha P_1P_2 + \beta P_1P_2' + \gamma P_1'P_2 + \delta P_1'P_2' = 0,$$

en appelant P_1, P_2, P_1', P_2' les premiers membres des équations des quatre plans, et α, β, γ, δ quatre coefficients constants. Sous cette forme, on voit que la surface du second ordre trouvée comme lieu passe par les quatre droites suivant lesquelles les plans P_1 et P_2 coupent respectivement les plans P_1' et P_2'.

On peut démontrer géométriquement, et aussi analytiquement en prenant par exemple la droite D comme axe des z, que toute section du lieu par un plan perpendiculaire à l'une des droites D ou D′ est un cercle.

Dans le cas où les droites sont concourantes, les plans passent tous par leur point de concours, et le lieu est un cône du second ordre.

---

64. — *Trouver la condition pour que deux droites données par leurs équations soient dans un même plan.*

Si l'on considère les droites comme données chacune par l'intersection de deux plans, ainsi que cela a eu lieu dans l'exercice précédent, il faut que les quatre plans P_1, P_2, P_1' et P_2' aient un point commun ; par suite, d'après l'exercice 62, il faut que le déterminant des coefficients et des termes connus dans les équations de ces plans soit nul.

Un cas particulier est celui où les droites sont parallèles. Si a, b, c sont les paramètres directeurs de leur direction commune, on doit avoir les conditions

$$A_1a + B_1b + C_1c = 0, \qquad A_1'a + B_1'b + C_1'c = 0,$$
$$A_2a + B_2b + C_2c = 0, \qquad A_2'a + B_2'b + C_2'c = 0.$$

D'après ce que nous avons dit au n° 12, les quatre déterminants du troisième degré formés au moyen des coefficients A, B, C doivent être tous les quatre nuls ; dans ce cas, du reste, le déterminant des coefficients A, B, C, D est forcément nul.

Si l'on veut résoudre la même question lorsque les équations des droites sont données, comme au n° 112, en mettant en évidence les paramètres directeurs, on écrit qu'à un point commun correspondent des valeurs ρ et ρ', telles que l'on ait

$$x_0 + \rho a = x_1 + \rho' a', \quad y_0 + \rho b = y_1 + \rho' b', \quad z_0 + \rho c = z_1 + \rho' c';$$

ces équations du premier degré en ρ et ρ' doivent être compatibles et, d'après le n° 13, il est nécessaire que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_0 - x_1 & a & a' \\ y_0 - y_1 & b & b' \\ z_0 - z_1 & c & c' \end{vmatrix}$$

soit nul. Dans le cas particulier où les droites sont parallèles, les paramètres directeurs doivent être proportionnels.

---

65. — *Trouver les équations de la perpendiculaire commune à deux droites; on formera l'équation d'un plan parallèle aux deux droites, puis on mènera par chacune de ces droites un plan perpendiculaire à celui-là. Calculer la plus courte distance des deux droites.*

Supposons que les droites soient données en mettant en évidence les paramètres directeurs, comme dans l'exercice précédent; un plan parallèle aux deux droites a pour coefficients (n° 114)

$$A = bc' - cb', \qquad B = ca' - ac', \qquad C = ab' - ba'.$$

Pour calculer la plus courte distance des deux droites, il suffit de prendre un point de D' et de déterminer sa distance à un plan mené par D parallèle à D'; ce plan a pour équation

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

et la distance cherchée a pour valeur

$$\frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

où A, B, C ont les valeurs calculées précédemment.

Pour trouver les équations de la perpendiculaire commune, on con-

sidère un plan mené par D perpendiculaire au plan précédent ; il a pour équation

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 ;$$

de la même manière, on considère un plan mené par D′ perpendiculaire aussi au même plan ; les équations des deux plans ainsi formés sont celles de la perpendiculaire commune.

---

66. — *Des vecteurs représentés par les côtés successifs d'un triangle parcourus dans un même sens de circulation forment un système équivalent à un couple. Généraliser pour un polygone quelconque.*

Le polygone des vecteurs représentés par les côtés successifs d'un contour est identique à ce contour ; si donc celui-ci est fermé, la résultante générale est nulle et le système est équivalent à un système nul ou à un couple. Dans le cas d'un triangle, le système est réductible à un couple, dont le moment s'obtient en prenant la somme des moments des vecteurs par rapport à l'un des sommets du triangle ; cette somme se réduit au moment du côté opposé et a pour valeur le double de la surface du triangle ; le vecteur représentatif est perpendiculaire au plan du triangle dans un sens tel que pour un observateur placé suivant ce vecteur, le sens de circulation sur les côtés du triangle soit positif (n° 119).

Dans le cas d'un polygone fermé quelconque, plan ou gauche, si l'on trace des diagonales issues de l'un des sommets, on forme une suite de triangles ayant chacun un côté commun avec le précédent ; en plaçant sur les diagonales des vecteurs égaux et opposés représentés par ces diagonales supposées parcourues dans des sens opposés, on voit que l'on est ramené à une suite de triangles analogues aux précédents. Chacun des systèmes représentés par les côtés de ces triangles est réductible à un couple ; il en est de même du système total, et l'on obtiendra le moment résultant en composant géométriquement les vecteurs représentatifs des moments partiels.

On peut retrouver ce résultat par le calcul : si (x_i, y_i, z_i) $(i = 0, 1, \ldots, n)$

sont les coordonnées des sommets successifs, le dernier étant confondu avec le premier, le vecteur de rang k joignant le point d'indice $k-1$ au point d'indice k a pour projections

$$X_k = x_k - x_{k-1}, \qquad Y_k = y_k - y_{k-1}, \qquad Z_k = z_k - z_{k-1}.$$

On voit d'abord que $\Sigma X_k = 0$, $\Sigma Y_k = 0$, $\Sigma Z_k = 0$, ce qui montre que la résultante est nulle; la projection sur l'axe Ox du moment résultant est fournie par l'équation

$$L = \Sigma\,[y_{k-1}(z_k - z_{k-1}) - z_{k-1}(y_k - y_{k-1}) = \Sigma(y_{k-1}z_k - z_{k-1}y_k)$$

et des équations analogues donnent les projections M et N du moment résultant sur les autres axes.

---

67. — *Lieu des points de l'espace tels que le moment résultant d'un système de vecteurs par rapport à chacun d'eux soit parallèle à une droite donnée. Discussion des différents cas.*

Soient X, Y, Z, L, M, N les six coordonnées d'un système de vecteurs, et x, y, z les coordonnées d'un point quelconque A de l'espace; le moment résultant du système par rapport au point A est (nº 121)

$$L' = L - (yZ - zY), \qquad M' = M - (zX - xZ), \qquad N' = N - (xY - yX).$$

Laissons de côté le cas peu intéressant où le système de vecteurs se réduit à zéro; examinons le cas particulier où X, Y, Z sont tous les trois nuls; le système se réduit à un couple et le moment résultant est toujours parallèle à une direction fixe; le problème est donc indéterminé ou impossible, suivant que la droite donnée est ou n'est pas parallèle à cette direction.

Dans le cas où la résultante générale n'est pas nulle, les conditions pour que le moment résultant soit parallèle à une droite donnée de paramètres directeurs a, b, c s'obtiennent en écrivant que L', M', N' sont proportionnels à a, b, c, ou bien que l'on a, en désignant par t la valeur commune des rapports,

$$yZ - zY = L - at, \qquad zX - xZ = M - bt, \qquad xY - yX = N - ct.$$

On peut remplacer l'une des équations par la combinaison obtenue en

ajoutant les produits des équations par X, Y, Z respectivement, c'est-à-dire

$$0 = \mathrm{LX} + \mathrm{MY} + \mathrm{NZ} - (a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + c\mathrm{Z})t\,;$$

on obtient alors les cas suivants :

1° La résultante générale X, Y, Z n'est pas perpendiculaire à la direction donnée ; la somme $a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + c\mathrm{Z}$ n'est pas nulle ; la dernière équation donne une valeur unique pour t et deux des équations précédentes déterminent le lieu du point (x, y, z) ; elles représentent une droite particulière, parallèle à la résultante générale.

2° La résultante générale est perpendiculaire à la direction donnée, et en outre le système n'est pas réductible à une résultante unique ; la somme $\mathrm{LX} + \mathrm{MY} + \mathrm{NZ}$ n'est pas nulle, l'équation en t est impossible et le problème n'a pas de solution.

3° La résultante générale est perpendiculaire à la direction donnée et de plus le système est réductible à une résultante unique R ; la somme $\mathrm{LX} + \mathrm{MY} + \mathrm{NZ}$ est nulle, l'équation en t est identiquement satisfaite et les équations se réduisent à deux distinctes. L'élimination de t entre deux d'entre elles fournit l'équation d'un plan qui est le lieu cherché.

En prenant comme origine un point de la résultante unique R, les quantités L, M, N sont nulles, et l'équation du lieu se réduit à $ax + by + cz = 0$; elle représente un plan perpendiculaire à la direction donnée et contenant la résultante R.

---

68. — *Généraliser dans l'espace les problèmes nos 45 et 46.*

En utilisant des notations analogues à celles de l'exercice 45, on voit que le lieu des points (x, y, z) dont la somme des carrés des distances à des points donnés est égale à k^2 a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\frac{\Sigma x_i}{n}x - 2\frac{\Sigma y_i}{n}y - 2\frac{\Sigma z_i}{n}z - \frac{k^2}{n} + \frac{\Sigma(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)}{n} = 0\,;$$

cette équation représente une sphère dont le centre est le centre des moyennes distances des points donnés.

La condition pour que deux sphères représentées par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a'x + 2b'y + 2c'z + d' = 0,$$

se coupent orthogonalement est

$$2aa' + 2bb' + 2cc' - d - d' = 0.$$

---

69. — *Trouver le centre et le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre connaissant les coordonnées de ses sommets.*

Soient $A_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ les sommets du tétraèdre, $A(x, y, z)$ le centre de la sphère circonscrite et R le rayon de cette sphère; les quatre inconnues x, y, z et R sont fournies par les quatre équations

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = R^2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

On peut les considérer comme quatre équations du premier degré, par rapport aux inconnues x, y, z et $t = R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$; en posant $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, elles sont de la forme

$$2xx_i + 2yy_i + 2zz_i + t = r_i^2.$$

Ces équations ont une solution unique si le déterminant des coefficients des inconnues n'est pas nul; d'après le n° 114, ce déterminant n'est nul que si les quatre points x_i, y_i, z_i sont dans un même plan; dans le cas d'un véritable tétraèdre, il n'y a donc qu'un système de valeurs de x, y, z et t, par suite de R, fourni par le système précédent.

---

70. — *Démontrer que l'ellipsoïde, les hyperboloïdes, le cône, le paraboloïde elliptique et le cylindre elliptique possèdent des sections circulaires. Pour les déterminer, on opère un changement d'axes de coordonnées en conservant l'un des axes et faisant tourner les deux autres dans leur plan d'un angle* α; *on détermine* α *de façon que la section de la surface par un plan parallèle à l'un des nouveaux plans de coordonnées soit une circonférence.*

L'équation d'une surface de second ordre ayant un centre peut être ramenée à la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - D = 0$$

elle représente un ellipsoïde ou un hyperboloïde si aucun des coefficients n'est nul, un cône si D est nul, et un cylindre parallèle à Oz si C est nul.

Coupons la surface par un plan P passant par l'axe Oy, tel que sa trace Ox' sur le plan xOz fasse avec Ox un angle α : pour tout point M de ce plan, de coordonnées x', y par rapport aux axes $Ox'y$, on a

$$x = x' \cos \alpha, \qquad z = x' \sin \alpha ;$$

par suite l'équation de la section de la surface par le plan est

$$(A \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha) x'^2 + By^2 - D = 0 ;$$

elle représente un cercle si les coefficients de x'^2 et de y^2 sont égaux, c'est-à-dire si l'on a

$$A \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha = B, \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{B - A}{C - B}.$$

Cette équation donne des valeurs réelles, égales et de signes contraires pour $\operatorname{tg} \alpha$ si B est compris entre A et C ; on en conclut que quels que soient les grandeurs et les signes des coefficients A, B, C, la surface a toujours des sections circulaires ; les plans de ces sections passent par l'axe correspondant au coefficient dont la valeur est comprise entre les deux autres

Supposons maintenant que la surface soit un paraboloïde elliptique représenté par l'équation

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0 ;$$

le même calcul que précédemment donne comme équation de la section par le plan $x'Oy$

$$\frac{y^2}{p} + \frac{x'^2 \sin^2 \alpha}{q} - 2x' \cos \alpha = 0 ;$$

cette section sera un cercle si l'on a $\frac{1}{p} = \frac{\sin^2 \alpha}{q}$. Cette équation fournit pour $\sin \alpha$ deux valeurs auxquelles correspondent des sections circulaires si q est inférieur à p ; si q est supérieur à p, il suffit d'intervertir le rôle des axes Oy et Oz.

Remarquons enfin que si une surface du second ordre est coupée suivant un cercle par un plan P, elle est aussi coupée suivant un cercle

par tout plan parallèle à P. Il suffit pour le voir de prendre des axes de coordonnées tels que le plan P soit le plan des xy; l'équation de la surface est de la forme

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c + z(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0,$$

puisque la section par le plan $z = 0$ doit être un cercle; on voit que la section de cette surface par un plan d'équation $z = h$ est encore un cercle.

III. — EXERCICES SUR LES DÉRIVÉES ET LES DIFFÉRENTIELLES

71. — *Exercices sur les dérivées, avec les résultats.*

FONCTIONS	DÉRIVÉES
$x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 1$,	$4x(x^2 + 3x - 3)$,
$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$,	$2x(2x^2 + 1)$,
$(5x + 1)^4(x^2 - 4)^3$,	$(5x + 1)^3(x^2 - 4)^2(50x^2 + 6x - 80)$,
$\dfrac{ax - b}{ax + b}$,	$\dfrac{2ab}{(ax + b)^2}$,
$\dfrac{1}{1 - x^2}$,	$\dfrac{2x}{(1 - x^2)^2}$,
$\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$,	$\dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 - x + 1)^2}$,
$\dfrac{1}{\sqrt{ax + b}}$,	$\dfrac{-a}{2\sqrt{(ax + b)^3}}$,
$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$,	$\dfrac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$,
$\dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$,	$\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$,
e^{-x^2},	$-2x\,e^{-x^2}$,
$\log \dfrac{1 - x}{1 + x}$,	$\dfrac{-2}{1 - x^2}$,
$\log\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$,	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$,
$\log \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$,	$\dfrac{1}{\cos x}$,
$\dfrac{n \sin 2x}{1 - n \cos 2x}$,	$\dfrac{2n(\cos 2x - n)}{(1 - n \cos 2x)^2}$,

FONCTIONS	DÉRIVÉES
$\operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1-x^2}$,	$\frac{2}{1+x^2}$,
$\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$,	$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

Les règles de calcul indiquées aux n°s 136 et suivants conduisent aux résultats mentionnés ; nous ferons seulement, au sujet des trois dernières fonctions proposées, les remarques suivantes :

Si $\alpha = \operatorname{arc\,tg} x$ et $\beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1-x^2}$, on a $x = \operatorname{tg} \alpha$ et $\frac{2x}{1-x^2} = \operatorname{tg} \beta$; mais $\operatorname{tg} 2\alpha$ a également pour valeur $\frac{2x}{1-x^2}$, donc $\beta = 2\alpha + k\pi$; la dérivée de β est égale à deux fois la dérivée de α, ou à $\frac{2}{1+x^2}$.

Si $\alpha = \arcsin x$ et $\beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, on a $x = \sin \alpha$, $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{tg} \beta$; mais $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, donc $\beta = \alpha + k\pi$ et la dérivée de β est égale à celle de α ou de $\arcsin x$.

Si $\alpha = \arcsin x$ et $\beta = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$, on a $x = \sin \alpha$ et $2x\sqrt{1-x^2} = \sin \beta$; mais $\sin 2\alpha = 2x\sqrt{1-x^2}$, donc β et 2α ayant le même sinus sont tels que $\beta = 2k\pi + 2\alpha$, ou $\beta = (2k+1)\pi - 2\alpha$; la dérivée de β est égale, au signe près, à deux fois la dérivée de α ou de $\arcsin x$.

---

72. — *D'après Christoffel, l'indice de réfraction d'un rayon lumineux de longueur d'onde λ est donné par la formule*

$$n = \frac{n_0\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1-\frac{\lambda_0}{\lambda}}},$$

n_0 et λ_0 étant des constantes. Calculer la dérivée de n par rapport à λ.

En multipliant haut et bas par la quantité conjuguée du dénominateur, on peut d'abord écrire n sous la forme

$$n = \frac{n_0\sqrt{2}}{2\lambda_0}\left(\sqrt{\lambda^2+\lambda_0\lambda} - \sqrt{\lambda^2-\lambda_0\lambda}\right);$$

on trouve alors

$$n' = \frac{n_0\sqrt{2}}{4\lambda_0}\left[\frac{2+\frac{\lambda_0}{\lambda}}{\sqrt{1+\frac{\lambda_0}{\lambda}}} - \frac{2-\frac{\lambda_0}{\lambda}}{\sqrt{1-\frac{\lambda_0}{\lambda}}}\right].$$

---

73. — *Déterminer la dérivée d'ordre* n *de* $\frac{1}{\sqrt{x}}$, *de* $\sin ax$ *et de* $\log(1+x)$.

Les dérivées successives de $y = x^{-\frac{1}{2}}$ sont

$$y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}},\quad y'' = +\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}},\quad \ldots\ldots,$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{1.\,3.\,5\ldots(2n-1)}{2^n}x^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)};$$

celles de $z = \sin ax$ sont

$$z' = a\cos ax = a\sin\left(ax+\frac{\pi}{2}\right),\quad z'' = a^2\sin\left(ax+2\frac{\pi}{2}\right),\quad \ldots\ldots,$$

$$z^{(n)} = a^n\sin\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right);$$

celles de $u = \log(1+x)$ sont

$$u' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},\quad u'' = (-1)(1+x)^{-2},\quad \ldots\ldots,$$

$$u^{(n)} = (-1)^{n-1}\,1.\,2\ldots(n-1)(1+x)^{-n}.$$

---

74. — *Montrer que la dérivée* n^e *d'un produit* uv *est donnée par la formule suivante, qu'on appelle formule de Leibniz :*

$$y^n = u^{(n)}v + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)},$$

les coefficients successifs étant ceux du binome.

Pour $n = 1, 2, 3$, on a bien

$$y' = u'v + uv',\ y'' = u''v + 2u'v' + uv'',\ y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Par un raisonnement analogue à celui du n° 16, il suffit de montrer que si la formule est supposée vraie pour n, elle l'est encore pour $n + 1$. En prenant la dérivée des deux membres de $y^{(n)}$, on a

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + \left.\begin{array}{c} \frac{n}{1} \\ +1 \end{array}\right| u^{(n)}v' + \left.\begin{array}{c} \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \\ +\ \frac{n}{1} \end{array}\right| u^{(n-1)}v'' + \cdots\cdots + uv^{(n+1)},$$

ce qui est bien identique à

$$u^{(n+1)}v + \frac{n+1}{1}u^{(n)}v' + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}u^{(n-1)}v'' + \cdots\cdots + uv^{(n+1)};$$

la formule se trouve ainsi démontrée pour toutes les valeurs de n.

---

75. — *Vérifier que les fonctions* $e^{ax}\cos bx$ *et* $e^{ax}\sin bx$ *satisfont à la relation*

$$y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0.$$

La première des deux fonctions a pour dérivées successives

$$y' = e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx),$$
$$y'' = e^{ax}(a^2\cos bx - 2ab\sin bx - b^2\cos bx),$$

et elle satisfait bien à la relation donnée ; il en est de même pour la deuxième fonction.

---

76. — *Etudier les variations des fonctions suivantes, et construire les courbes représentatives :*

1° $$y = x^4 + px^2 + q.$$

Cette fonction a pour dérivée $y' = 4x\left(x^2 + \frac{p}{2}\right)$.

Fig. 3.

Si p est positif, la dérivée ne s'annule que pour $x = 0$, en passant du négatif au positif ; il en résulte

que la fonction passe, pour $x=0$, par un minimum égal à q (fig. 3).

Si p est négatif, la dérivée s'annule pour $x=0$ et en outre pour $x=\pm\sqrt{\frac{-p}{2}}$; on a alors le tableau des variations et la courbe ci-contre (fig. 4).

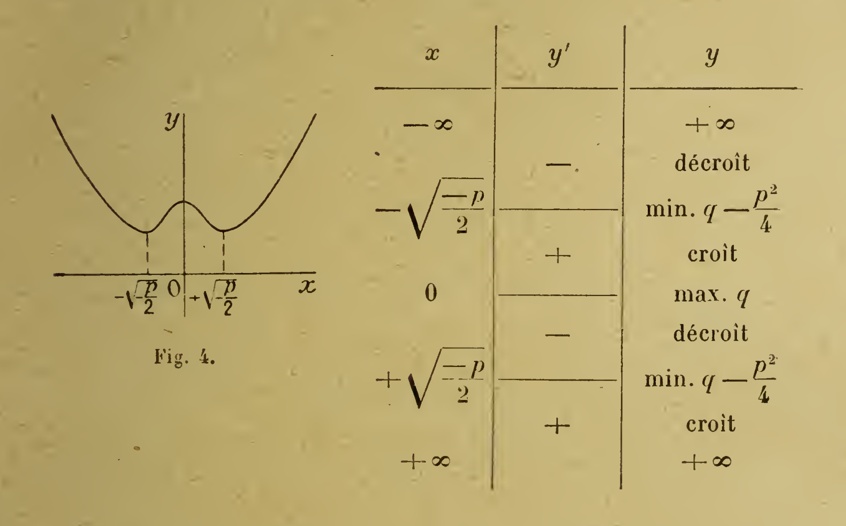


Fig. 4.

x	y'	y
$-\infty$		$+\infty$
	$-$	décroît
$-\sqrt{\frac{-p}{2}}$		min. $q-\frac{p^2}{4}$
	$+$	croît
0		max. q
	$-$	décroît
$+\sqrt{\frac{-p}{2}}$		min. $q-\frac{p^2}{4}$
	$+$	croît
$+\infty$		$+\infty$

On arriverait aux mêmes conclusions en étudiant les variations entre $X=0$ et $X=+\infty$ de la fonction $y=X^2+pX+q$, qui se déduit de la première en posant $x^2=X$.

2° $$y=(x-1)^3(5-x)^2.$$

Cette fonction a pour dérivée $y'=(x-1)^2(5-x)(17-5x)$.

La dérivée s'annule d'abord pour $x=1$ sans changer de signe, ce qui correspond à un point d'inflexion de la courbe représentative ; ensuite pour $x=5$ et $x=\frac{17}{5}$ en changeant de signe ; on a le tableau des variations et la courbe représentative (fig. 5).

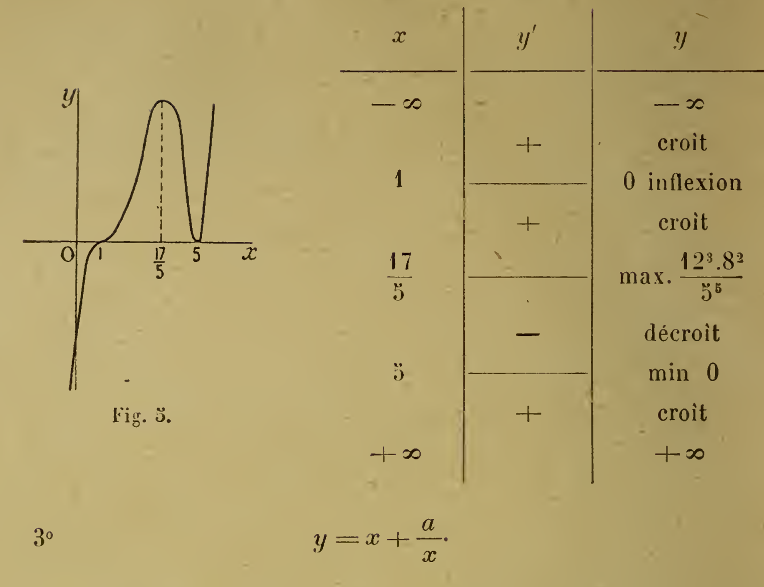


Fig. 5.

x	y'	y
$-\infty$		$-\infty$
	$+$	croît
1		0 inflexion
	$+$	croît
$\frac{17}{5}$		max. $\frac{12^3.8^2}{5^5}$
	$-$	décroît
5		min 0
	$+$	croît
$+\infty$		$+\infty$

3°
$$y = x + \frac{a}{x}.$$

Cette fonction est discontinue pour $x = 0$; sa dérivée, $y' = 1 - \frac{a}{x^2}$, s'annule ou ne s'annule pas suivant le signe de a.

Si $a > 0$, la dérivée s'annule pour $x = \pm\sqrt{a}$, on a le tableau et la courbe ci-contre (fig. 6).

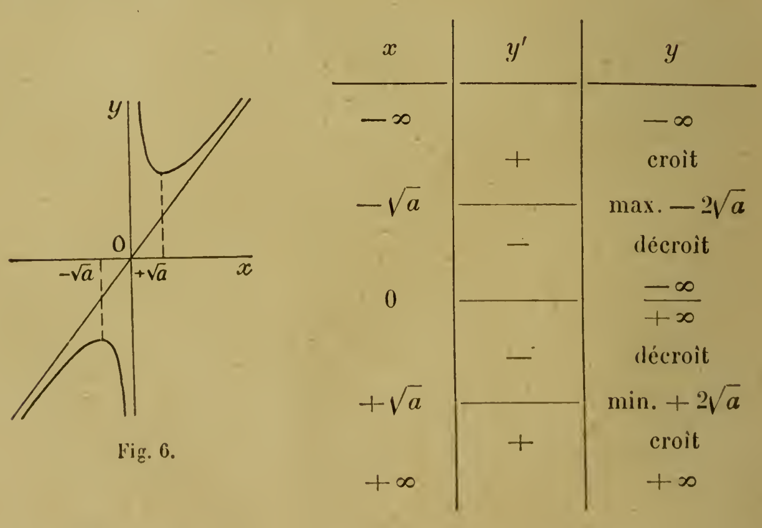


Fig. 6.

x	y'	y
$-\infty$		$-\infty$
	$+$	croît
$-\sqrt{a}$		max. $-2\sqrt{a}$
	$-$	décroît
0		$\frac{-\infty}{+\infty}$
	$-$	décroît
$+\sqrt{a}$		min. $+2\sqrt{a}$
	$+$	croît
$+\infty$		$+\infty$

Si $a < 0$, la dérivée ne s'annule pas et reste positive; la fonction est toujours croissante; elle s'annule pour $x = \pm\sqrt{-a}$; la courbe représentative est celle de la figure 7. Les deux courbes sont des hyperboles ayant pour asymptotes l'axe Oy et la droite $y = x$.

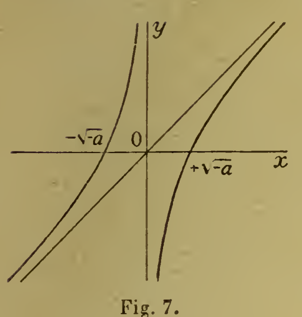


Fig. 7.

4° $$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}.$$

Cette fonction est discontinue pour $x = -1$, mais sans changer de signe; elle s'annule pour $x = 1$ et $x = 2$; la dérivée, $y' = \frac{5x - 7}{(x+1)^3}$, change de signe pour $x = -1$ et pour $x = \frac{7}{5}$; on a le tableau suivant des variations et la courbe représentative (fig. 8).

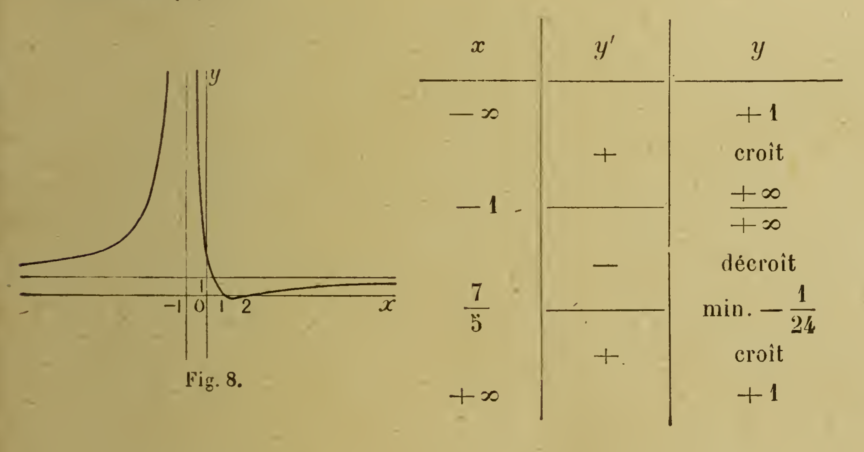


Fig. 8.

x	y'	y
$-\infty$		$+1$
	$+$	croît
-1		$+\infty$
		$+\infty$
	$-$	décroît
$\frac{7}{5}$		min. $-\frac{1}{24}$
	$+$	croît
$+\infty$		$+1$

5° $$y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3}.$$

Cette fonction est discontinue pour $x = 3$ et $x = \frac{1}{3}$; elle s'annule pour $x = 2$ et $x = \frac{1}{2}$; la dérivée, $y' = \frac{-5(x^2 - 1)}{(3x^2 - 10x + 3)^2}$, s'annule pour $x = \pm 1$; on a le tableau suivant des variations et la courbe représentative (fig. 9).

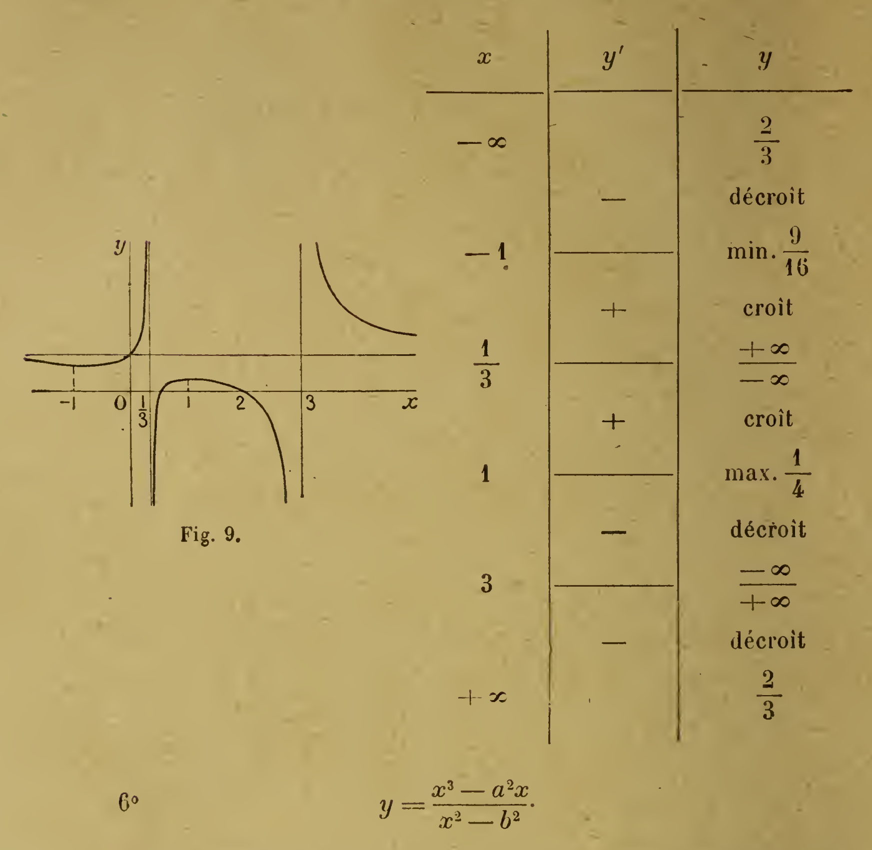


Fig. 9.

x	y'	y
$-\infty$		$\frac{2}{3}$
	$-$	décroît
-1		min. $\frac{9}{16}$
	$+$	croît
$\frac{1}{3}$		$\frac{+\infty}{-\infty}$
	$+$	croît
1		max. $\frac{1}{4}$
	$-$	décroît
3		$\frac{-\infty}{+\infty}$
	$-$	décroît
$+\infty$		$\frac{2}{3}$

6°
$$y = \frac{x^3 - a^2x}{x^2 - b^2}.$$

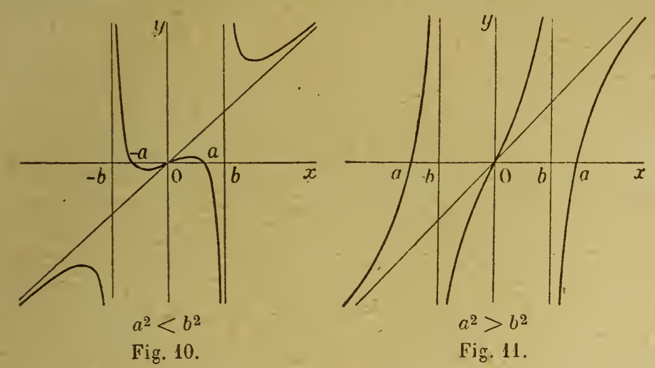
On peut supposer a et b positifs ; la fonction est discontinue pour $x = \pm b$; elle s'annule pour $x = \pm a$ et $x = 0$. La dérivée est

$$y' = \frac{x^4 + (a^2 - 3b^2)x^2 + a^2b^2}{(x^2 - b^2)^2};$$

la nature des racines du numérateur et l'ordre de grandeur des valeurs qui annulent y' dépendent de la comparaison de a^2 à b^2.

Si a^2 est inférieur à b^2, y' s'annule pour quatre valeurs réelles de x dont deux sont inférieures et deux supérieures en valeur absolue à a et b ; il est facile de former le tableau de variation, et la courbe représentative a la forme de la figure 10. Si au contraire b^2 est inférieur à a^2, la dérivée ne s'annule pas et est toujours positive, et l'on a la courbe représentative (fig. 11).

Les courbes ont pour centre l'origine et pour asymptotes les droites



$a^2 < b^2$
Fig. 10.

$a^2 > b^2$
Fig. 11.

$y = x$, $x = \pm b$; le coefficient angulaire de la tangente à l'origine est égal à la limite de $\frac{y}{x}$ pour $x = a$, c'est-à-dire à $\frac{a^2}{b^2}$.

7°
$$y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Cette fonction n'est réelle que si x est compris entre -1 et $+1$; elle est discontinue pour $x = -1$ et s'annule pour $x = 0$ et $x = 1$; la dérivée, $y' = \frac{1 - x - x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$, s'annule pour une seule valeur de x comprise entre -1 et $+1$; c'est pour la valeur positive $x' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

On a le tableau suivant des variations et la courbe représentative (fig. 12).

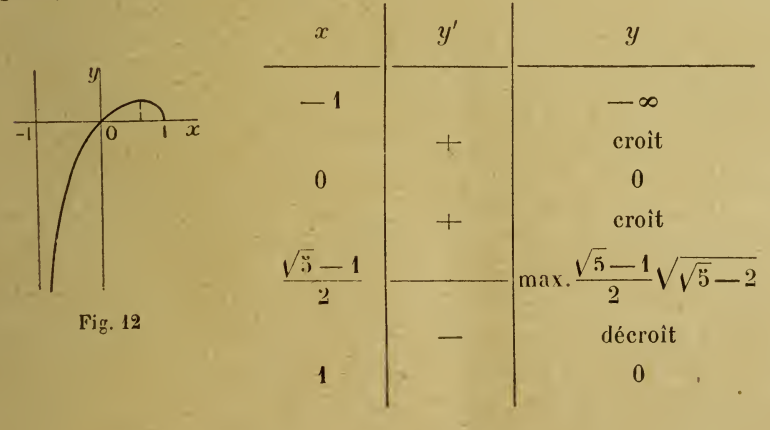


Fig. 12

x	y'	y
-1		$-\infty$
	$+$	croît
0		0
	$+$	croît
$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$		max. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}$
	$-$	décroît
1		0

En prenant la courbe symétrique de la précédente par rapport à l'axe Ox, on obtient une courbe algébrique qui est la strophoïde.

8°
$$y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}.$$

En exprimant $\operatorname{tg} 3x$ et $\operatorname{tg} 2x$ au moyen de $\operatorname{tg} x$, on peut écrire la fonction
$$y = \frac{(3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x)(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{(1 - 3 \operatorname{tg}^2 x) 2 \operatorname{tg} x}.$$

Pour $\operatorname{tg} x = 0$, y est indéterminé; en écartant ce cas, divisant les deux termes par $\operatorname{tg} x$ et posant $\operatorname{tg}^2 x = z$, on a la fraction du second degré
$$y = \frac{(3 - z)(1 - z)}{2(1 - 3z)}.$$

Si x varie de 0 à π, ou plus généralement de $2k\pi$ à $(2k + 1)\pi$, z varie de 0 à $+\infty$ et les variations de y sont de même nature que celles de la fonction de z précédente. Si x varie de 0 à $-\pi$ ou plus généralement de $2k\pi$ à $(2k - 1)\pi$, les variations de y sont symétriques des précédentes.

La fonction y de z est discontinue pour $z = \frac{1}{3}$ et s'annule pour $z = 1$ et $z = 3$; sa dérivée,
$$y' = \frac{-3z^2 + 2z + 5}{2(1 - 3z)^2},$$
s'annule pour la valeur positive $z = \frac{5}{3}$; on a le tableau suivant des variations et la courbe représentative (fig. 13).

z	0		$\frac{1}{3}$		1		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
y'		$+$	|	$+$		$+$	|	$-$		$-$	
y	$\frac{3}{2}$	croît	$+\infty$ | $-\infty$	croît	0	croît	$\frac{1}{9}$ *max.*	décroît	0	décroît	$-\infty$

Cette courbe est une partie d'hyperbole et a pour asymptotes

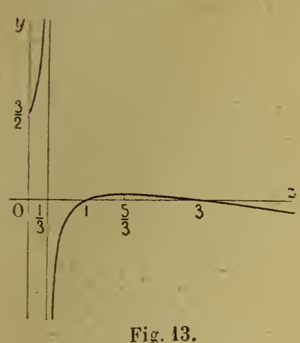


Fig. 13.

les droites $z = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{-z}{6} + \frac{11}{18}$ (n° 260).

9° $y = x - \sin 2x$.

Cette fonction est toujours réelle et continue; sa dérivée,

$$y' = 1 - 2\cos 2x,$$

s'annule lorsque $\cos 2x = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$. Aux valeurs $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ correspondent des minima égaux à $k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et

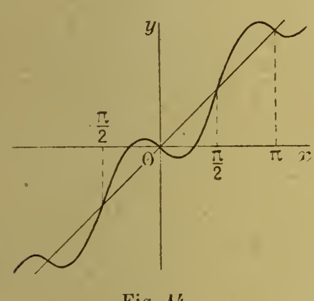


Fig. 14.

aux valeurs $x = k\pi - \frac{\pi}{6}$ correspondent des maxima égaux à $k\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. La courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine et plus généralement par rapport à tous ses points d'abscisses $x = \frac{k\pi}{2}$; elle se compose d'une suite d'arcs égaux dont l'un correspond aux valeurs de x comprises entre 0 et π (fig. 14); et dont les autres se déduisent de celui-là par une translation parallèle à la droite $y = x$. Le coefficient angulaire de la tangente à l'origine ainsi qu'aux points d'abscisses $k\pi$ est -1; aux points d'abscisses $k\pi + \frac{\pi}{2}$, il est égal à 3 (n° 248).

10° $y = 2\sin x + \cos 2x$.

Cette fonction est réelle et continue; sa dérivée,

$$y' = 2\cos x\,(1 - 2\sin x),$$

s'annule lorsque $\cos x = 0$, c'est-à-dire pour $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, et lorsque $\sin x = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ et $x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}$.

Aux valeurs $x = 2k\pi + \frac{2}{\pi}$ correspondent des minima égaux à 1 ;

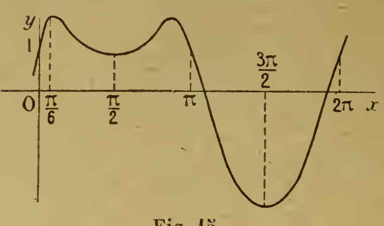


Fig. 15.

aux valeurs $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ des minima égaux à -3 ; aux valeurs $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ et $(2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}$ correspondent des maxima égaux à 2 ; la fonction est périodique, de période 2π, et il suffit de construire la portion comprise entre 0 et 2π représentée ci-contre (fig. 15), puis de transporter cette portion parallèlement à Ox par une translation égale à $2k\pi$.

11° $$y = x^n e^{-x^2}.$$

Nous supposons n entier et positif, la fonction est réelle et continue ; sa dérivée est

$$y' = x^{n-1} e^{-x^2} (n - 2x^2).$$

Si n est pair, la dérivée s'annule pour la valeur $x = 0$ à laquelle correspond un minimum, et pour les valeurs $x = \pm\sqrt{\frac{n}{2}}$ auxquelles correspondent des maxima ; la courbe représentative est symétrique par rapport à Oy (fig. 16).

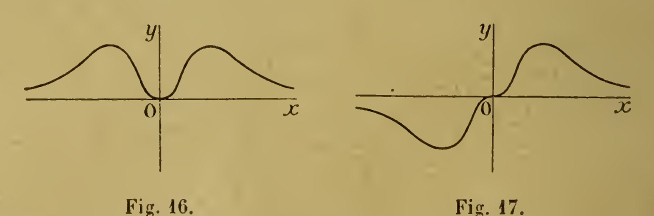


Fig. 16. Fig. 17.

Si n est impair, il y a un minimum pour $x = -\sqrt{\frac{n}{2}}$ et un maximum pour $x = +\sqrt{\frac{n}{2}}$; la courbe (fig. 17) est symétrique par rapport à l'origine, elle présente en ce point un point d'inflexion, la tangente étant confondue avec Ox si n est supérieur à 1.

12° $$y = x + \log(x^2 - 1).$$

Cette fonction n'est réelle que si $x^2 - 1$ est positif, c'est-à-dire si $x < -1$ ou > 1 ; elle est discontinue pour $x = \pm 1$; sa dérivée, $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$, s'annule dans l'intervalle de réalité pour la seule valeur $x = -1 - \sqrt{2}$ à laquelle correspond un maximum. La courbe représentative a la forme ci-contre (fig. 18); les ordonnées de cette courbe se déduisent de celles de la droite $y = x$, en leur ajoutant la quantité $\log(x^2 - 1)$ et cette quantité s'annule pour $x = \pm\sqrt{2}$.

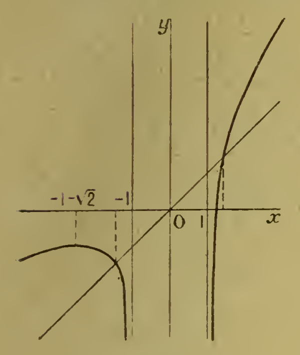


Fig. 18.

---

77. — *Étudier la variation du volume d'un cône d'apothème donné.*

Si a est l'apothème du cône et x sa hauteur, le rayon de sa base est égal à $\sqrt{a^2 - x^2}$ et son volume est $V = \dfrac{1}{3}\pi(a^2 - x^2)x$; les variations de ce volume sont les mêmes que celles de la fonction

$$y = (a^2 - x^2)x = a^2x - x^3.$$

Cette fonction est réelle et continue ; sa dérivée, $y' = a^2 - 3x^2$, s'annule pour la valeur $x = -a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, à laquelle correspond un minimum, et pour la valeur $x = +a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, à laquelle correspond un maximum. La courbe représentative (fig. 19) est symétrique par rapport à l'origine ; la seule portion qui convienne au problème géométrique est celle qui est comprise entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = a$.

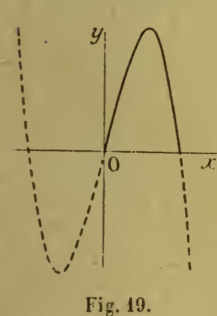


Fig. 19.

---

78. — *Étudier la variation du volume et celle de la surface totale d'un cylindre ou d'un cône inscrits dans une sphère donnée.*

Si $2x$ est la hauteur d'un cylindre inscrit dans une sphère de rayon R, le rayon de la base de ce cylindre est $\sqrt{R^2 - x^2}$, son volume V et sa surface totale S sont

$$V = 2\pi(R^2 - x^2)x, \qquad S = 2\pi(R^2 - x^2) + 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}.$$

La variation de V est la même que celle de la fonction de l'exercice précédent; la surface varie comme la fonction

$$y = R^2 - x^2 + 2x\sqrt{R^2 - x^2};$$

cette fonction n'est réelle que si x est compris entre $-R$ et $+R$; sa dérivée,

$$y' = \frac{2}{R^2 - x^2}\left[-x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 - 2x^2\right],$$

ne peut s'annuler que si x satisfait à l'équation rationnelle

$$x^2(R^2 - x^2) = (R^2 - 2x^2)^2.$$

Cette équation en x^2 a pour racines les valeurs $x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}R^2$, qui sont toutes deux positives et inférieures à R^2, mais l'une est inférieure à l'autre et supérieure à $\frac{R^2}{2}$; il en résulte que la dérivée y' s'annule pour la racine carrée positive de la première valeur, et pour la racine carrée négative de la seconde; comme y' est positif pour $x = 0$, on voit qu'à la valeur $x' = -R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ correspond un minimum et à la valeur $x'' = +R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ correspond un maximum. La courbe représentative a la forme de la figure 20; la partie comprise entre les abscisses $x = 0$ et $x = R$ correspond au problème géométrique; elle représente la variation de la somme des surfaces des bases et de la surface latérale du cylindre; la partie comprise entre les ab-

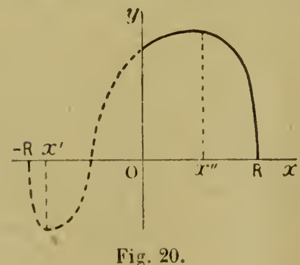


Fig. 20.

scisses $x = 0$ et $x = -R$ représente la variation de la différence entre la somme des surfaces des bases et la valeur absolue de la surface latérale.

Si l'on représente par x la hauteur d'un cône inscrit dans la même sphère, le rayon de la base de ce cône est $r = \sqrt{x(2R - x)}$ et son volume a pour mesure

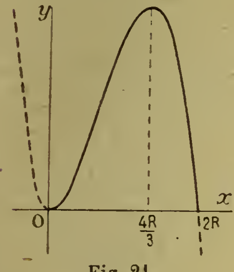


Fig. 21.

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 (2R - x);$$

la variation de ce volume est la même que celle de la fonction

$$y = x^2(2R - x) = 2Rx^2 - x^3;$$

sa dérivée, $y' = 4Rx - 3x^2$, s'annule pour la valeur $x = 0$, à laquelle correspond un minimum, et pour la valeur $x = \frac{4R}{3}$, à laquelle correspond un maximum; la courbe représentative a la forme de la figure 21; la portion comprise entre les abscisses $x = 0$ et $x = 2R$ correspond seule au problème géométrique.

La surface totale du même cône a pour mesure

$$S = \pi x(2R - x) + \pi\sqrt{x(2R - x)}\sqrt{2Rx};$$

elle varie comme la fonction

$$y = x(2R - x) + x\sqrt{2R(2R - x)};$$

cette fonction n'est réelle que pour $x < 2R$; sa dérivée,

$$y' = \frac{2(R - x)\sqrt{2R(2R - x)} + 4R^2 - 3Rx}{\sqrt{2R(2R - x)}},$$

s'annule pour des valeurs comprises parmi les racines de l'équation

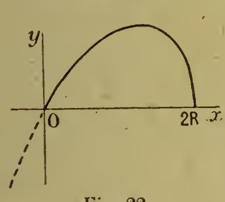


Fig. 22.

$$8R(2R - x)(R - x)^2 - (4R^2 - 3Rx)^2$$
$$= -Rx(8x^2 - 23Rx + 16R^2) = 0.$$

Cette équation a pour racines d'abord $x = 0$ et ensuite deux valeurs x' et x'' réelles et comprises toutes les deux entre R et 2R; mais l'une est inférieure et l'autre supérieure à $4\frac{R}{3}$;

la seule valeur $x' = R\frac{23-\sqrt{17}}{16}$ comprise entre R et $\frac{4}{3}$R peut annuler la dérivée y', et il lui correspond un maximum de la fonction. La courbe représentative a la forme de la figure 22; la partie comprise entre les abscisses 0 et 2R convient seule à la question.

---

79. — *Étudier la variation du volume, de la surface latérale et de la surface totale d'un cône circonscrit à une sphère donnée.*

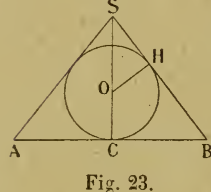


Fig. 23.

Soit SAB (fig. 23) la section méridienne d'un cône circonscrit à une sphère de centre O et de rayon R; en désignant par x la hauteur SC du cône, les triangles semblables SCB, SOH donnent

$$\frac{CB}{OH}=\frac{SB}{SO}=\frac{SC}{SH} \quad \text{ou} \quad \frac{CB}{R}=\frac{SB}{x-R}=\frac{x}{\sqrt{x(x-2R)}};$$

on en déduit le rayon de la base $r=\frac{Rx}{\sqrt{x(x-2R)}}$ et l'apothème $a=\frac{x(x-R)}{\sqrt{x(x-2R)}}$ du cône considéré; son volume est $V=\frac{1}{3}\frac{\pi R^2 x^3}{x(x-2R)}$.

En laissant de côté le cas où x est nul, la variation de ce volume est la même que celle de la fonction $y=\frac{x^2}{x-2R}$. Cette fonction est discontinue pour $x=2R$; sa dérivée,

$$y'=\frac{x^2-4Rx}{(x-2R)^2},$$

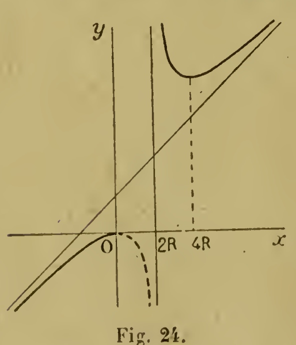


Fig. 24.

s'annule pour la valeur $x=0$ en passant du positif au négatif, et pour la valeur $x=4R$ en passant du négatif au positif; à la première correspond un maximum de y égal à 0 et à la seconde un minimum égal à 8R; la courbe représentative (fig. 24) est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites

d'équations $x = 2R$ et $y = x + 2R$ (n° 260) ; la partie comprise entre 0 et 2R ne répond pas à la question géométrique.

La surface latérale du cône a pour mesure

$$S = \pi ra = \frac{\pi R x^2 (x - R)}{x(x - 2R)};$$

en laissant de côté le cas où x est nul, la variation de cette surface est la même que celle de la fonction $y = \frac{x(x-R)}{x-2R}$. L'étude de cette variation est analogue à la précédente ; la dérivée,

$$y' = \frac{x^2 - 4Rx + 2R^2}{(x - 2R)^2},$$

s'annule pour les valeurs $x = R(2 \pm \sqrt{2})$; la courbe représentative (fig. 25) est encore une hyperbole ayant pour asymptotes les droites d'équation $x = 2R$ et $y = x + R$; la partie comprise entre les abscisses 0 et 2R ne convient pas à la question géométrique.

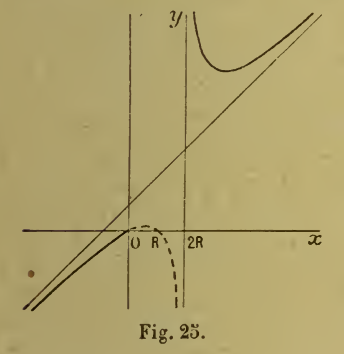


Fig. 25.

La surface totale du cône a pour mesure

$$S_1 = \pi ra + \pi r^2 = \frac{\pi R x^3}{x(x - 2R)};$$

on voit que le volume est égal au produit de cette surface par le tiers du rayon R ; cela résulte du reste de cette remarque que le volume d'un polyèdre circonscrit à une sphère est égal au produit de la surface de ce polyèdre par le tiers du rayon ; la variation de la surface totale est donc la même que celle du volume.

---

80. — *Déterminer les dimensions d'un litre cylindrique en métal à une seule base, sachant que la surface du métal est minimum.*

Si x et y sont le rayon de la base et la hauteur du litre, il faut chercher le minimum de la fonction $S = \pi x^2 + 2\pi xy$ sachant que le

volume $V = \pi x^2 y$ est donné ; on en déduit

$$y = \frac{V}{\pi x^2}, \qquad S = \pi x^2 + \frac{2V}{x}.$$

Cette fonction S est discontinue pour $x = 0$; sa dérivée,

$$S' = 2\pi x - \frac{2V}{x^2},$$

s'annule pour $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ en passant du négatif au positif, de sorte qu'à cette valeur correspond un minimum de S ; on trouve $y = x$ et $S = 3\sqrt[3]{\pi V^2}$.

Si V est égal à un décimètre cube, on a $x = y = 0^{dm},6827...$

---

81. — *Déterminer sur la droite joignant deux points où sont placées des sources lumineuses d'intensités données différentes le point dont l'éclairement total dû aux deux sources est maximum.*

Si x et x' sont les distances du point aux deux sources lumineuses, i et i' les éclairements à l'unité de distance, l'éclairement total est égal à $\frac{i}{x^2} + \frac{i'}{x'^2}$, et l'on a de plus $x + x' = a$; on a donc à trouver le maximum de la fonction $y = \frac{i}{x^2} + \frac{i'}{(a-x)^2}$, dont la dérivée,

$$y' = \frac{-2i}{x^3} + \frac{2i'}{(a-x)^3},$$

s'annule pour $x = \frac{a}{1 + \sqrt[3]{\frac{i'}{i}}}$, et à cette valeur correspond un maximum de la fonction.

---

82. — *On donne un petit segment rectiligne horizontal ; déterminer le point où il faut placer une source lumineuse : 1° soit sur une droite donnée perpendiculaire à la direction du segment ; 2° soit sur une ellipse donnée dont le centre est le milieu du segment, et dont un axe est horizontal, pour que l'éclairement de ce segment soit maximum.*

On sait que cet éclairement est èn raison inverse du carré de la distance de la source lumineuse au centre du segment et proportionel au sinus de l'angle formé par le rayon lumineux aboutissant à ce centre avec la direction du segment éclairé.

Choisissons un système de coordonnées polaires tel que l'origine soit le centre du segment donné et l'axe des x la direction de ce segment; si a est l'abscisse d'une droite donnée perpendiculaire à Ox, le rayon vecteur ρ d'un point situé sur la droite est $\rho = \frac{a}{\cos\theta}$, et l'éclairement du segment est proportionnel à la fonction $\frac{\sin\theta}{\rho^2}$ ou à la fonction $y = \sin\theta\cos^2\theta$. La dérivée,

$$y' = \cos^3\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta,$$

s'annule pour des valeurs de θ égales et de signe contraire, et égales en valeur absolue à 90° et à $54^\circ 44'$; à ce dernier angle correspond un maximum.

Si la source lumineuse se déplace sur une ellipse de demi-axes a et b, l'axe de longueur $2a$ étant dirigé suivant Ox, l'équation de cette courbe en coordonnées polaires est

$$\rho^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = 1;$$

l'éclairement est proportionnel à $\frac{\sin\theta}{\rho^2}$ ou à la fonction

$$y = \sin\theta\,(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta),$$

qui a pour dérivée

$$y' = \cos\theta\,[b^2\cos^2\theta + (3a^2 - 2b^2)\sin^2\theta].$$

Si a^2 est plus grand que $\frac{2b^2}{3}$, la dérivée ne s'annule que pour $\cos\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, et à cette valeur correspond un maximum; si a^2 est plus petit que $\frac{2b^2}{3}$, la dérivée s'annule encore pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, à laquelle correspond un minimum, et pour les valeurs fournies par l'équation $\operatorname{tg}^2\theta = \frac{b^2}{2b^2 - 3a^2}$, auxquelles correspond un maximum.

---

83. — *Former les dérivées partielles du premier ordre des fonctions*

$$\frac{x+y}{xy}, \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, \qquad \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \qquad e^{xyz};$$

pour la dernière fonction, former f'''_{xyz}.

1° $z = \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}, \quad z'_x = -\dfrac{1}{x^2}, \quad z'_y = -\dfrac{1}{y^2};$

2° $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+y}{1-xy}, \quad z'_x = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad z'_y = \dfrac{1}{1+y^2};$

on peut vérifier que $z = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y$, car si α et β sont les arcs dont les tangentes sont x et y, on a

$$x = \operatorname{tg} \alpha, \qquad y = \operatorname{tg} \beta, \qquad \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta),$$

donc

$$z = \alpha + \beta = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y;$$

cette remarque permet de retrouver les dérivées de z.

3° $z = \dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad z'_x = \dfrac{y(1+y^2)}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad z'_y = \dfrac{x(1+x^2)}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$

4° $f = e^{xyz}, \quad f'_x = yze^{xyz}, \quad f'_y = zxe^{xyz}, \quad f'_z = xye^{xyz},$

$$f'''_{xyz} = (x^2y^2z^2 + 3xyz + 1)\, e^{xyz}.$$

---

84. — *Déterminer les dérivées première et seconde des fonctions implicites* y *définies par les équations*

$$x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0, \qquad x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

$$\sin y = n \sin x, \qquad \log \sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

Si y est donné par l'équation $f(x, y) = 0$, on a

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}, \qquad y'' = -\frac{(f''_{x^2} + f''_{xy}\, y')\, f'_y - (f''_{xy} + f''_{y^2} y')\, f'_x}{(f'_y)^2}$$

$$= -\frac{f''_{x^2}\,(f'_y)^2 - 2\, f''_{xy}\, f'_x\, f'_y + f''_{y^2}\,(f'_x)^2}{(f'_y)^3}.$$

l'application aux équations données conduit aux résultats :

$$1^\circ \quad y' = \frac{x - 2y}{2x - y}, \qquad y'' = \frac{-3}{(2x - y)^3};$$

$$2^\circ \quad y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}, \qquad y'' = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}.$$

$$3^\circ \quad \sin y = n \sin x, \qquad \cos y \,.\, y' = n \cos x, \qquad y' = \frac{n \cos x}{\cos y};$$

$$y'' = \frac{-n \sin x \cos y + n \sin y \cos x \,.\, y'}{\cos^2 y} = \frac{(n^3 - n) \sin x}{\cos^3 y}.$$

$$4^\circ \quad \frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{x + y}{x - y};$$

$$y'' = \frac{(1 + y')(x - y) - (1 - y')(x + y)}{(x - y)^2} = \frac{2(x^2 - 2xy - y^2)}{(x - y)^3}.$$

---

85. — *Déterminer les dérivées partielles de la fonction* z *définie par l'équation*

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} - 1 = 0.$$

En posant

$$F = \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - c^2)^2}$$

on a

$$x\left[\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} - F\right] + zz'_x\left[\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} - F\right] = 0,$$

$$y\left[\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} - F\right] + zz'_y\left[\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} - F\right] = 0,$$

ce qui fournit z'_x et z'_y.

---

86. — *Déterminer les maxima et les minima des fonctions implicites* y *définies par les équations*

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x = 0, \qquad y^3 + x^3 - 3axy = 0.$$

La dérivée $y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$ ne peut changer de signe qu'en s'annulant ou en devenant infinie, c'est-à-dire lorsque f'_x ou f'_y s'annulent. Dans le premier exemple, on a

$$f'_x = 2(2x - y - 1), \quad f'_y = 2(y - x);$$

l'équation $f'_x = 0$, jointe à $f(x, y) = 0$, a pour solutions

$$x_1 = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad y_1 = 1 - \sqrt{2}; \quad x_2 = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad y_2 = 1 + \sqrt{2};$$

de même, l'équation $f'_y = 0$, jointe à $f(x, y) = 0$, a pour solutions

$$x_3 = 0, \quad y_3 = 0; \quad x_4 = 2, \quad y_4 = 2.$$

Pour le système (x_1, y_1), f'_y est négatif et f'_x passe du négatif au positif, et à ce système correspond un minimum de y; de même au système (x_2, y_2) correspond un maximum de y; quant aux valeurs x_3, y_3, x_4, y_4 qui annulent f'_y, elles ne fournissent pas un maximum ou un minimum de y, car les valeurs de y fournies par l'équation $f(x, y) = 0$ doivent être égales pour $x = x_3$ ou x_4 et ne sont réelles que si x est compris entre x_3 et x_4; mais si l'on considère x comme fonction de y, cette fonction passe par un minimum pour le système (x_3, y_3) et par un maximum pour le système (x_4, y_4).

L'étude directe des fonctions représentées par les racines,

$$y = x \pm \sqrt{2x - x^2},$$

aurait conduit au même résultat.

En opérant de la même manière pour le deuxième exemple, on voit (n° 265) que la fonction y de x passe par un maximum pour $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a\sqrt[3]{4}$, et que la fonction x de y passe par un maximum pour $x = a\sqrt[3]{4}$, $y = a\sqrt[3]{2}$.

---

87. — *Étant donnée la courbe du second ordre ayant pour centre l'origine et représentée par l'équation*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1 = 0,$$

déterminer les directions et les longueurs de ses axes en cherchant

les points pour lesquels le carré de la distance au centre, c'est-à-dire la fonction $\rho^2 = x^2 + y^2$, passe par un maximum ou un minimum.

En annulant la dérivée de la fonction composée $\rho^2 = x^2 + y^2$ considérée comme fonction de x, on obtient l'équation $2x + 2yy' = 0$; mais y est fourni par l'équation de la courbe, dont la dérivée est

$$2(Ax + By) + 2(Bx + Cy)y' = 0.$$

En éliminant y' entre les deux équations, on a la relation

$$\frac{Ax + By}{x} = \frac{Bx + Cy}{y}, \qquad \text{ou} \qquad By^2 + (A - C)\,xy - Bx^2 = 0;$$

cette équation homogène représente deux droites suivant lesquelles sont dirigés les axes de la courbe.

Les rapports précédents ont une valeur commune égale à

$$\frac{Ax + By}{x} = \frac{Bx + Cy}{y} = \frac{x(Ax + By) + y(Bx + Cy)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho^2};$$

l'égalité de chacun des premiers rapports à $\frac{1}{\rho^2}$ donne les relations

$$\left(A - \frac{1}{\rho^2}\right)x + By = 0, \qquad Bx + \left(C - \frac{1}{\rho^2}\right)y = 0;$$

si l'on élimine x et y entre ces deux équations homogènes, on obtient la relation

$$\left(A - \frac{1}{\rho^2}\right)\left(C - \frac{1}{\rho^2}\right) - B^2 = 0,$$

qui fournit les carrés des longueurs des axes.

On la trouve plus rapidement en cherchant l'équation du faisceau des droites joignant l'origine aux points de rencontre de la courbe avec le cercle d'équation $x^2 + y^2 = \rho^2$; ces droites sont représentées (nº 88) par l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - \frac{1}{\rho^2}(x^2 + y^2) = 0;$$

lorsque le rayon du cercle est égal à l'un des demi-axes de la courbe, les deux droites précédentes sont confondues ; en écrivant que l'équation homogène ainsi trouvée fournit pour $\frac{y}{x}$ deux racines égales, on retrouve l'équation en ρ^2 précédemment obtenue.

88. — *Étant donnée dans l'espace la courbe d'intersection de l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et du plan

$$ux + vy + wz = 0$$

passant par le centre, déterminer les axes de cette section en cherchant les points pour lesquels la fonction $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ *passe par un maximum ou un minimum; démontrer que les directions des axes sont les droites communes au plan et au cône dont l'équation est*

$$uyz\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + vzx\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) + wxy\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0,$$

et que les carrés des longueurs des demi-axes sont les racines de l'équation

$$\frac{a^2u^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{b^2v^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{c^2w^2}{\rho^2 - c^2} = 0.$$

En opérant comme dans l'exercice précédent et considérant y et z comme fonctions de x, on doit écrire les équations

$$x + yy'_x + zz'_x = 0, \qquad \frac{x}{a^2} + \frac{yy'_x}{b^2} + \frac{zz'_x}{c^2} = 0, \qquad u + vy'_x + wz'_x = 0.$$

L'élimination de y'_x et z'_x entre ces équations conduit à la relation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0;$$

cette équation représente un cône dont les droites d'intersection par le plan donné sont les directions des axes de la section; on peut l'écrire, en développant le déterminant, sous la forme donnée dans l'énoncé.

Pour trouver les carrés des longueurs des axes, multiplions les éléments des colonnes du déterminant respectivement par x, y, z, et ajoutons-les pour former une première colonne nouvelle, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & y & z \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ ux + vy + wz & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho^2 & y & z \\ 1 & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ 0 & v & w \end{vmatrix} = 0;$$

en développant cette relation, elle donne l'équation

$$wy\left(\frac{\rho^2}{b^2}-1\right)=vz\left(\frac{\rho^2}{c^2}-1\right).$$

De cette équation et de celles qui s'en déduisent par permutation circulaire des lettres résulte la suite des relations

$$\frac{x(\rho^2-a^2)}{ua^2}=\frac{y(\rho^2-b^2)}{vb^2}=\frac{z(\rho^2-c^2)}{wc^2};$$

il suffit de remplacer dans l'équation du plan donné $x, y, z,$ par les valeurs proportionnelles tirées de là pour obtenir l'équation cherchée

$$\frac{a^2u^2}{\rho^2-a^2}+\frac{b^2v^2}{\rho^2-b^2}+\frac{c^2w^2}{\rho^2-c^2}=0.$$

On pourrait arriver à ce résultat en formant l'équation du cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice la courbe d'intersection de l'ellipsoïde par la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=\rho^2$. Cette équation (exercice 57) est

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)=0;$$

elle représente un cône ; en écrivant que le plan donné rencontre ce cône suivant deux droites confondues ou bien lui est tangent, on retrouverait l'équation déjà obtenue.

---

89. — *Étant donnée la surface du second ordre ayant pour centre l'origine et pour équation*

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy-1=0,$$

déterminer les directions et les longueurs de ses axes en cherchant les points pour lesquels la fonction $\rho^2=x^2+y^2+z^2$ passe par un maximum ou un minimum.

En considérant z comme une fonction des deux variables x et y définie par l'équation de la surface, on voit que ρ^2 est une fonction des deux mêmes variables ; on obtient les maxima et minima de cette fonction en annulant séparément ses dérivées partielles par rapport à x et à y, c'est-à-dire en écrivant les équations

$$x+zz'_x=0, \qquad y+zz'_y=0.$$

Si nous désignons par $\varphi(x, y, z)$ l'ensemble des termes du second degré de l'équation de la surface, nous avons, pour déterminer les dérivées partielles de z, les deux équations

$$\varphi'_x + \varphi'_z z'_x = 0, \qquad \varphi'_y + \varphi'_z z'_y = 0;$$

en éliminant z'_x et z'_y entre les quatre relations précédentes, nous trouvons pour déterminer x, y, z les équations

$$\frac{\frac{1}{2}\varphi'_x}{x} = \frac{\frac{1}{2}\varphi'_y}{y} = \frac{\frac{1}{2}\varphi'_z}{z},$$

auxquelles il faut joindre l'équation de la surface.

La valeur commune des rapports précédents est égale à

$$\frac{\frac{1}{2}(x\varphi'_x + y\varphi'_y + z\varphi'_z)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\rho^2};$$

on obtient donc les équations

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}''y + \mathrm{B}'z - \frac{x}{\rho^2} = 0,$$

$$\mathrm{B}''x + \mathrm{A}'y + \mathrm{B}z - \frac{y}{\rho^2} = 0,$$

$$\mathrm{B}'x + \mathrm{B}y + \mathrm{A}''z - \frac{z}{\rho^2} = 0;$$

en éliminant x, y, z entre ces relations, on obtient l'équation

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} - \frac{1}{\rho^2} & \mathrm{B}'' & \mathrm{B}' \\ \mathrm{B}'' & \mathrm{A}' - \frac{1}{\rho^2} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}' & \mathrm{B} & \mathrm{A}'' - \frac{1}{\rho^2} \end{vmatrix} = 0,$$

qui donne les carrés des longueurs des demi-axes ; à chacune des racines de cette équation correspond un ensemble de valeurs proportionnelles à x, y, z fournies par deux des équations du premier degré précédentes ; ces valeurs sont représentées par les points d'une droite qui est un axe de la surface. On voit ainsi que la recherche de la direction des axes résulte de la résolution de l'équation du troisième

degré qui donne les valeurs de $\frac{1}{\rho^2}$; cette dernière n'est autre que l'équation en S que l'on utilise dans la recherche des directions principales (n° 309).

---

90. — *Déterminer dans l'espace le point dont la somme des carrés des distances à des points fixes donnés est maximum ou minimum.*

Si x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ sont les coordonnées des points fixes donnés, et x, y, z celles du point cherché M, on doit rendre maximum ou minimum la fonction des trois variables

$$f = \Sigma\rho^2 = \Sigma\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\right].$$

En annulant séparément les dérivées de f par rapport à x, y, z, on a les trois équations

$$nx - \Sigma x_i = 0, \qquad ny - \Sigma y_i = 0, \qquad nz - \Sigma z_i = 0;$$

elles ont comme solution les coordonnées du centre des moyennes distances des points donnés. L'étude des dérivées secondes de f montre que la fonction est minimum pour le système des valeurs obtenues. Ce résultat peut être rapproché de celui que nous avons trouvé au n° 68.

---

91. — *Un récipient a la forme d'un parallélépipède rectangle et sa surface se compose de l'ensemble de ses faces moins une; déterminer ses dimensions de façon que cette surface soit minimum pour un volume donné.*

Si x, y, z sont les longueurs des arêtes, le volume est $V = xyz$ et la surface considérée est

$$S = xy + 2xz + 2yz;$$

c'est une fonction des deux variables indépendantes x, y égale à

$$S = xy + \frac{2(x+y)V}{xy} = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

En annulant ses dérivées partielles, on a les équations

$$S'_x = y - \frac{2V}{x^2} = 0, \qquad S'_y = x - \frac{2V}{y^2} = 0,$$

qui sont satisfaites pour les valeurs $x = y = \sqrt[3]{2V}$.

L'étude des dérivées secondes,

$$S''_{x^2} = \frac{4V}{x^3}, \qquad S''_{xy} = 1, \qquad S''_{y^2} = \frac{4V}{y^3},$$

qui prennent les valeurs $S''_{x^2} = 2$, $S''_{xy} = 1$, $S''_{y^2} = 2$ pour le système des valeurs trouvées, montre que la fonction passe par un minimum; sa valeur est $3\sqrt[3]{4V^2}$.

---

92. — *Déterminer dans le plan d'un triangle le point dont le produit des distances aux trois côtés est maximum.*

Soient x, y, z les distances d'un point M aux trois côtés a, b, c d'un triangle ABC; si ce point est à l'intérieur du triangle, il existe entre x, y, z et la surface S de ce triangle la relation $ax + by + cz = 2S$; on a donc à trouver le maximum ou le minimum de la fonction $f = xyz$ dans les conditions précédentes. Le problème est analogue à celui qui est traité au nº 166; le produit des facteurs $ax, by, cz,$ dont la somme est constante, est maximum lorsque les facteurs sont égaux, c'est-à-dire lorsque l'on a $ax = by = cz = \frac{2S}{3}$; on voit que le point correspondant est le centre de gravité du triangle.

Si le point M est exinscrit dans un des angles, par exemple dans l'angle C, les distances x, y, z sont liées par la relation

$$ax + by - cz = 2S;$$

on a à trouver le maximum ou le minimum de la fonction

$$f = \frac{xy}{c}(ax + by - 2S);$$

ses dérivées partielles ne s'annulent pour aucune valeur positive et non nulle des variables; dans ce cas, il n'y a pas de maximum ni de minimum de la fonction. Il en est de même si le point est dans l'angle opposé par le sommet à l'un des angles du triangle.

---

93. — *Déterminer un parallélépipède rectangle inscrit dans un*

ellipsoïde, et dont le volume ou la surface totale soit maximum ou minimum.

Désignons par x, y, z les coordonnées positives du sommet M du parallélépipède situé dans le trièdre positif des coordonnées ; les autres sommets auront leurs coordonnées égales à $\pm x, \pm y, \pm z$; les arêtes parallèles aux axes sont égales à $2x, 2y, 2z$. Le volume du parallélépipède est égal à $8xyz$, les trois variables étant liées par la relation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$; le volume varie comme le produit $\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{z^2}{c^2}$ de trois facteurs dont la somme est constante ; en laissant de côté le cas où l'une ou l'autre des coordonnées est nulle, on voit comme dans l'exercice précédent que le maximum du volume a lieu lorsque l'on a $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$, d'où $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{c}{\sqrt{3}}$.

La surface totale est égale à $8(xy+xz+yz)$; cette fonction peut être considérée comme composée de deux variables x et y, par l'intermédiaire de z fourni par l'équation de l'ellipsoïde $\varphi=0$; en posant $f=xy+xz+yz$, nous devons écrire les équations

$$f'_x+f'_z z'_x=0,\quad f'_y+f'_z z'_y=0\quad \text{et}\quad \varphi'_x+\varphi'_z z'_x=0,\quad \varphi'_y+\varphi'_z z'_y=0.$$

En éliminant z'_x et z'_y, nous obtenons

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x}=\frac{f'_y}{\varphi'_y}=\frac{f'_z}{\varphi'_z}\quad \text{ou}\quad \frac{y+z}{\frac{x}{a^2}}=\frac{z+x}{\frac{y}{b^2}}=\frac{x+y}{\frac{z}{c^2}}.$$

Remarquons que x, y, z ne peuvent pas être tous les trois nuls ; dès lors la valeur commune de ces rapports est égale à

$$\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}=2f;$$

nous pouvons par suite écrire les trois équations

$$y+z-\frac{2f}{a^2}x=0,\quad z+x-\frac{2f}{b^2}y=0,\quad x+y-\frac{2f}{c^2}z=0.$$

En les considérant comme homogènes par rapport à x, y, z, et éliminant ces trois inconnues, nous en déduisons la relation

$$\begin{vmatrix} -\frac{2f}{a^2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{2f}{b^2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{2f}{c^2} \end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$f^3 - \frac{f}{4}(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - \frac{a^2b^2c^2}{4} = 0.$$

Cette équation a toujours ses trois racines réelles (n° 228), parce que la condition $4p^3 + 27q^2 < 0$ est toujours remplie; cette condition s'écrit en effet

$$(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)^3 - 27a^4b^4c^4 > 0;$$

or, il est facile de conclure des raisonnements faits dans la résolution de l'exercice n° 2, que si α, β et γ sont trois nombres positifs, on a toujours

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geqslant 3\alpha\beta\gamma, \qquad (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)^3 > 27\alpha^3\beta^3\gamma^3;$$

il suffit alors d'écrire $\alpha^3 = b^2c^2$, $\beta^3 = c^2a^2$, $\gamma^3 = a^2b^2$ pour en conclure que l'inégalité entre a, b, c est satisfaite.

Il existe donc trois valeurs de f, dont une seule est positive, qui sont maximum ou minimum; les valeurs correspondantes de x, y, z se déduisent des équations du premier degré homogènes écrites précédemment; elles fournissent un sommet du parallélépipède comme point de rencontre de l'ellipsoïde avec la droite d'intersection de deux des plans représentés par ces équations.

Suivant le signe des valeurs ainsi trouvées pour x, y, z, la fonction dont on trouve ainsi le maximum ou le minimum est égale à la somme ou à la différence des surfaces des faces du parallélépipède.

Sans effectuer le calcul des dérivées secondes, on peut se rendre compte d'une manière simple, en donnant à x, y, z toutes les valeurs positives ou nulles qui satisfont à l'équation $\varphi = 0$, que les valeurs prises par f sont dans certains cas égales à 0 et dans d'autres cas positives; par suite la racine positive de l'équation du troisième degré

en f doit correspondre à un maximum de la somme des faces du parallélépipède.

---

94. — *Étant donnés deux nombres x et $y = x + \varepsilon$ dont la différence est très petite, quelle erreur commet-on lorsqu'on substitue à $\sqrt{xy}$ la moyenne arithmétique $\frac{x+y}{2}$ des deux nombres?*

L'erreur commise est

$$\delta = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2;$$

la différence $\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y-x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x+\varepsilon}+\sqrt{x}}$ diffère très peu de $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{x}}$; par suite l'erreur à évaluer diffère très peu de $\frac{\varepsilon^2}{8x}$.

---

95. — *Avec quelle approximation connaît-on la surface d'un rectangle dont les dimensions sont $a = 75^{cm}$ à 2^{mm} près, et $b = 32^{cm}$ à 1^{mm} près?*

D'après la formule (7) du n° 170, on a

$$\Delta ab = a\Delta b + b\Delta a = 75 \times 0{,}1 + 32 \times 0{,}2 = 13^{cm^2}{,}9\,;$$

on peut prendre, comme limite supérieure de l'erreur, 14^{cm^2}, la surface est donc comprise entre $(2\,400 + 14)^{cm^2}$ et $(2\,400 - 14)^{cm^2}$.

---

96. — *Évaluer une limite supérieure de l'erreur dont est affectée la racine cubique d'un nombre approché; déterminer le rayon d'une sphère dont le volume est $2^{m^3}{,}752$ à 1^{dm^3} près, le nombre π étant pris égal à 3,1416 : évaluer une limite supérieure de l'erreur commise.*

Si $N = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, on a

$$\Delta N = f'_a \Delta a = \frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} \Delta a = \frac{1}{3} \frac{\Delta a}{(\sqrt[3]{a})^2}.$$

Soit à trouver le rayon d'une sphère de volume V, d'après la for-

mule $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{V}{\pi}}$; π est donné avec une erreur inférieure à $\frac{1}{10^5}$; en prenant le décimètre comme unité, on a

$$\Delta \frac{V}{\pi} = \frac{\Delta V}{\pi} + \frac{V \Delta \pi}{\pi^2} = \frac{1}{\pi} + \frac{2\,752}{\pi^2} \cdot \frac{1}{10^5} < 0,33 :$$

en conservant dans $\frac{V}{\pi}$ deux chiffres décimaux exacts, on obtient un nombre 875,98, avec une erreur totale inférieure à 0,34; par suite $\frac{3}{4} V = 656,985$ est connu avec une erreur inférieure à $\frac{3}{4} 0,34 < 0,27$. En prenant la racine cubique de ce nombre, on a un résultat compris entre 8,6 et 8,7; l'erreur commise est au plus égale à $\frac{1}{3}\frac{0,27}{(8,6)^2}$ ou 0,0013; en calculant le résultat avec quatre chiffres décimaux, on commet une nouvelle erreur inférieure à 0,0001, par conséquent le nombre trouvé, 8,6933, est connu avec une erreur inférieure à 0,0014; le rayon cherché est donc compris entre 8,6919 et 8,6947.

---

97. — *Déterminer l'approximation avec laquelle on peut évaluer le côté b d'un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse $a = 85^m,7$ à $0^m,2$ près et l'angle $B = 36^\circ 28'$ à $5'$ près.*

Le côté b est donné par la formule $b = a \sin B$, d'où l'on tire

$$\Delta b = \Delta a . \sin B + a \cos B . \Delta B.$$

Ici ΔB doit être évalué en radian, et a pour valeur $\frac{5\pi}{180 \times 60}$, cette valeur étant inférieure à 0,0016; comme $\sin B$ et $\cos B$ sont inférieurs respectivement à 0,6 et 0,9, on a pour limite de Δb le nombre $0,2 \times 0,6 + 90 \times 0,9 \times 0,0016$ ou 0,25.

Le calcul fait à l'aide des tables de logarithmes donne $b = 50,94$, avec une erreur due aux tables inférieure à 0,01; l'erreur totale est donc inférieure à 0,26.

---

98. — *Avec quelle approximation connaît-on la durée d'oscilla-*

tion d'un pendule simple dont la longueur est $l = 1^m,578$ *à* 0,002 *près; le nombre* g *est égal à* 9,81 *à* 0,005 *près. Quelle valeur approchée suffit-il de prendre pour* π *pour effectuer le calcul?*

La formule $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ donne d'abord $\frac{l}{g} = 0{,}16085...$, avec une erreur au plus égale à $\frac{\Delta l}{g} + l\frac{\Delta g}{g^2}$ ou à 0,0003; en prenant $\frac{l}{g} = 0{,}1608$ avec quatre chiffres exacts, l'erreur totale est inférieure à 0,0004. La racine carrée est supérieure à 0,4, l'erreur dont elle est affectée est inférieure à $\frac{0{,}0004}{2 \times 0{,}4}$ ou 0,0005; en prenant la racine carrée avec quatre chiffres exacts, 0,4009, l'erreur totale est inférieure à 0,0006. Il reste à calculer le produit de cette racine par π; l'erreur sur le produit est

$$\Delta\pi \times 0{,}4009 + 0{,}0006 \times \pi;$$

il suffit de prendre $\Delta\pi = 0{,}005$, c'est-à-dire $\pi = 3{,}14$ pour que les deux termes soient du même ordre de grandeur, on a alors comme limite de l'erreur 0,004. En prenant trois chiffres dans le produit 1,2596, on trouve comme résultat 1,26 à 0,005 près.

---

99. — *Calculer à un millimètre près les dimensions du litre, sachant qu'il a la forme d'un cylindre dont la hauteur est égale au diamètre.*

Si h est la hauteur du cylindre, on a, en prenant le décimètre comme unité,

$$V = \frac{\pi h^3}{4} = 1; \qquad h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} = \sqrt[3]{4 \times 0{,}3183098...}.$$

Il faut que le résultat soit connu avec deux chiffres exacts; il suffit que l'erreur commise sur la racine soit inférieure à 0,005, et que, d'autre part, l'erreur provenant des chiffres négligés soit inférieure à la même limite; il suffit alors que la quantité sous le radical soit connue avec une erreur inférieure à 0,015. Nous prendrons $\frac{1}{\pi} = 0{,}318$ avec une erreur inférieure à 0,00031; nous serons certains que le produit

$4 \times 0{,}318 = 1{,}272$ est affecté d'une erreur inférieure à $0{,}0015$; comme la racine cubique de $1{,}272$ évaluée avec trois chiffres décimaux est $1{,}083$, on obtient finalement pour valeur de la hauteur $1{,}08$ à un millimètre près.

---

100. — *Calculer à 1 millième près* tg 15° *qui est égale à*

$$\sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}}.$$

On a

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}};$$

comme la racine est supérieure à $0{,}25$, il suffit que l'erreur dont est affectée la quantité sous le radical soit inférieure à $0{,}0005$ ou que $\sqrt{3}$ soit connu avec quatre chiffres décimaux exacts. En prenant $\sqrt{3} = 1{,}73205$ à $0{,}00001$ près, on a pour la quantité sous le radical $0{,}07180$ à $0{,}00004$ près, et sa racine est $0{,}2679$ avec une erreur inférieure à $0{,}0008$. En adoptant la valeur $0{,}268$, on est certain que le résultat est affecté d'une erreur inférieure à $0{,}001$.

---

101. — *L'intensité d'un courant est liée à la déviation* φ *de la boussole par la formule* $i = a \operatorname{tg} \varphi$, a *étant une constante. Quelle relation existe-t-il entre les erreurs relatives de* i *et de* φ?

On a

$$\Delta i = \frac{a \Delta\varphi}{\cos^2 \varphi}; \qquad \frac{\Delta i}{i} = \left(\frac{\Delta \varphi}{\varphi}\right) \frac{2\varphi}{\sin 2\varphi}.$$

L'erreur relative de i est égale à l'erreur relative de φ, multipliée par $\dfrac{2\varphi}{\sin 2\varphi}$.

---

102. — *Trouver la vraie valeur pour* $x = 1$ *de*

$$\frac{1 - 3x^2 + 2x^3}{(x^2 - 1)^2}, \qquad \frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3}, \qquad \frac{\log x}{x^n - 1}, \qquad \frac{\log \sin \frac{\pi x}{2}}{(x - 1)^2},$$

pour $x = 0$, *de*

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}, \qquad \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}, \qquad \frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)}, \qquad x^n \log x, \qquad x^x.$$

1° En prenant le rapport des dérivées secondes pour $x = 1$, on obtient $\frac{3}{4}$; c'est le résultat auquel on arriverait en divisant les deux termes de la fraction par $(x-1)^2$, et faisant ensuite $x = 1$.

2° En réduisant les fractions au même dénominateur, on remplace la différence par

$$\frac{-(1-x)(2x+1)}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)},$$

et l'on trouve comme limite $-\frac{1}{2}$.

3° Le rapport des dérivées est

$$\frac{1}{x} : nx^{n-1} = \frac{1}{nx^n};$$

la limite est $\frac{1}{n}$.

4° Le rapport des dérivées est $\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}}\right)\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{2(x-1)}$; le premier de ces deux facteurs a pour limite $\frac{\pi}{2}$; le deuxième, qui prend encore pour $x = 1$ la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ a même limite que le rapport des dérivées $\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{4}$, le rapport donné a pour limite $-\frac{\pi^2}{8}$.

5° Le rapport des dérivées $\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}$ a pour limite 2.

6° Le rapport des dérivées, $\frac{2x - \sin 2x}{4x^3}$, se présente encore pour $x = 0$ sous la forme $\frac{0}{0}$; en prenant le rapport des dérivées successives, on arrive au quotient $\frac{8\cos 2x}{24}$ dont la limite est $\frac{1}{3}$. On arriverait encore à ce résultat, en remplaçant $\sin x$ par $x - \frac{x^3}{6}(1+\varepsilon)$, ε tendant vers zéro avec x.

7° En prenant les rapports des dérivées successives, on obtient la limite $\frac{2}{3}$, on arriverait encore à ce résultat en remplaçant $\sin x$ par $x - \frac{x^3}{6}(1+\varepsilon)$ et $\cos x$ par $1 - \frac{x^2}{2}(1+\varepsilon')$.

8° Il résulte du n° 177 que la limite est nulle si n est positif, et infinie si n est nul ou négatif.

9° En posant $y = x^x$, on a $\log y = x \log x$, la limite pour $x = 0$ de $\log y$ est nulle et celle de y est alors égale à l'unité.

---

103. — *En se servant des développements en série des fonctions simples, déterminer le développement en série des fonctions suivantes :*

$$e^{-x^2}, \qquad \frac{2+x}{2-x}, \qquad \frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{2x}, \qquad \log\frac{1+x}{1-x};$$

déduire du dernier développement, en posant $x = \frac{1}{2n+1}$, *la formule*

$$\log(n+1) - \log n = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \cdots\right];$$

cette formule sert à calculer les logarithmes népériens des nombres entiers successifs.

1° $$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1.2} - \frac{x^6}{1.2.3} + \cdots$$

la série est convergente quel que soit x.

2° $$\frac{2+x}{2-x} = 1 + \frac{x}{1-\frac{x}{2}} = 1 + x\left[1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2^2} + \frac{x^4}{2^3} + \cdots;$$

la série est convergente si x est inférieur à 2 en valeur absolue.

3° Le développement en série de $\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ est (n° 183)

$$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{x^4}{1.2} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^6}{6} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^8}{8} + \cdots$$

le développement cherché est

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{6}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{8}+\cdots\right];$$

il est convergent pour x inférieur à l'unité en valeur absolue.

4° En retranchant l'un de l'autre le développement de $\log(1+x)$ (n° 184) et celui qui s'en déduit en changeant le signe de x, on a

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left[\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right],$$

la série étant convergente pour x inférieur à 1 en valeur absolue.

---

104. — *Sachant que la surface d'un ellipsoïde de révolution aplati dont le rayon de l'équateur est a et l'excentricité e est donnée par la formule*

$$s=2\pi a^2\left(1+\frac{1-e^2}{2e}\log\frac{1+e}{1-e}\right),$$

développer s en série ordonnée suivant les puissances croissantes de e.

En appliquant le résultat précédent on a pour toute valeur de e inférieure à l'unité

$$\frac{1-e^2}{2e}\log\frac{1+e}{1-e}=(1-e^2)\left(1+\frac{e^2}{3}+\frac{e^4}{5}+\cdots\right),$$

de sorte que l'on obtient

$$s=4\pi a^2\left[1-\frac{e^2}{1.3}-\frac{e^4}{3.5}-\frac{e^6}{5.7}-\cdots\right].$$

---

105. — *Développer en série arc sin x en utilisant le développement en série de la dérivée de cette fonction.*

Le développement en série de la dérivée de $y=\text{arc}\sin x$ est (n° 183)

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\cdots;$$

celui de l'arc y s'annulant avec x est

$$y = \text{arc} \sin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

ce développement étant valable pour x inférieur à l'unité en valeur absolue. La somme de la deuxième série de l'exercice 19 est la valeur de $\text{arc} \sin \frac{1}{2}$ ou $\frac{\pi}{6}$.

---

106. — *Vérifier la formule*

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ arc tg } \frac{1}{5} - \text{arc tg } \frac{1}{239}$$

et en déduire la valeur de π.

En posant $\alpha = \text{arc tg}\frac{1}{5}$, $\beta = \text{arc tg}\frac{1}{239}$, il faut vérifier que $4\alpha = \beta + \frac{\pi}{4}$ ou $\text{tg } 4\alpha = \frac{1 + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \beta}$; il suffit de remplacer $\text{tg } 4\alpha$ par $\frac{4 \text{ tg } \alpha - 4 \text{ tg}^3 \alpha}{1 - 6 \text{ tg}^2 \alpha + \text{tg}^4 \alpha}$, puis $\text{tg } \alpha$ par $\frac{1}{5}$ et $\text{tg } \beta$ par $\frac{1}{239}$. On en déduit

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \cdots\right] - \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3} + \cdots\right].$$

Les deux séries sont rapidement convergentes : en prenant trois termes dans la première et un seul terme dans la seconde, l'erreur (n° 40) est inférieure à la somme des premiers termes négligés ou à 0,00001, et l'on obtient 0,785405 ··· comme valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$.

---

107. — *On donne un arc de cercle* AB *dont la corde est égale à* $2l$ *et dont la flèche est* f, *et l'on pose* $\frac{f}{l} = x$; *démontrer que la valeur de l'arc* AB *est donnée par la série*

$$\text{arc AB} = 2l\left(1 + \frac{2}{1.3}x^2 - \frac{2}{3.5}x^4 + \frac{2}{5.7}x^6 - \cdots\right);$$

montrer que si l'on prend, comme valeur approchée de l'arc AB, *l'expression* $2\sqrt{l^2+f^2}+\frac{f^2}{3l}$, *et si on la développe en série suivant les puissances croissantes de* x, *la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée de l'arc est divisible par* x^4.

Si α est la moitié de la mesure en radian de l'arc AB et r le rayon du cercle, on a $2l = \text{corde AB} = 2r \sin \alpha$, $f = r(1-\cos\alpha)$, de sorte que l'on a

$$x=\frac{f}{l}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad \alpha = 2 \operatorname{arc tg} x = 2\left[\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right].$$

L'arc AB est égal à $2r\alpha = \frac{2l\alpha}{\sin\alpha} = 2l\alpha\frac{1+x^2}{2x}$. En remplaçant α par sa valeur, on a

$$\text{arc AB} = 2l(1+x^2)\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\cdots\right)$$
$$=2l\left(1+\frac{2}{1.3}x^2-\frac{2}{3.5}x^4+\frac{2}{5.7}x^6-\cdots\right);$$

si l'on considère la valeur approchée

$$2\sqrt{l^2+f^2}+\frac{f^2}{3l}=2l\left[\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{6}x^2\right]$$

et si l'on développe $\sqrt{1+x^2}$ comme dans l'exercice 103, on obtient la série

$$2l\left[1+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^6}{6}-\cdots\right];$$

la différence entre la valeur approchée et la valeur exacte est

$$2l\left[\frac{x^4}{120}+\frac{3x^6}{560}+\cdots\right].$$

---

108. — *Former le tableau des différences successives de la suite des carrés des nombres entiers, ainsi que de la suite des cubes de ces nombres.*

Carrés.				Cubes.				
u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$
1	3	2	0	1	7	12	6	0
4	5	2	0	8	19	18	6	0
9	7	2	0	27	37	24	6	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.
n^2	$2n+1$	2	0	n^3	$3n^2+3n+1$	$6(n+1)$	6	0
$(n+1)^2$	$2(n+1)+1$	2	0	$(n+1)^3$	$\begin{cases} 3(n+1)^2 \\ +3(n+1) \\ +1 \end{cases}$	$6(n+2)$	6	0

---

109. — *Appliquer la formule d'interpolation de Lagrange et celle de Newton à la détermination d'une fonction qui prend les mêmes valeurs que* $\cos x$ *pour* $x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, +\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{2}$. *Même question en remplaçant* $\cos x$ *par* $\sin x$.

Les valeurs de $\cos x$ et $\sin x$ pour les valeurs données de x sont

	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\sin x$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

En appliquant la formule de Lagrange, et simplifiant, on a pour valeur approchée de $\cos x$:

$$u = \frac{64}{\pi^4}\left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)\left(x^2 - \frac{\pi^2}{16}\right) - \frac{64}{3\pi^4}\frac{\sqrt{2}}{2}x^2\left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right),$$

et pour valeur approchée de $\sin x$:

$$v = \frac{32}{3\pi^3}x\left(x^2 - \frac{\pi^2}{16}\right) - \frac{64}{3\pi^3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x\left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right).$$

Pour appliquer la formule de Newton, nous formons le tableau des différences

Cos x					Sin x				
u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$	v	Δv	$\Delta^2 v$	$\Delta^3 v$	$\Delta^4 v$
0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1-\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}-3$	$6-4\sqrt{2}$	-1	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$1-\sqrt{2}$	0
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}-2$	$3-2\sqrt{2}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$1-\sqrt{2}$	
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}-1$	$1-\sqrt{2}$			0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1-\sqrt{2}$		
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$				$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$			
0					1				

En posant $z = \dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}}$, on a

$$u = z\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{z(z-1)}{1\,.\,2}(1-\sqrt{2}) + \frac{z(z-1)(z-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(2\sqrt{2}-3)$$
$$+ \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(6-4\sqrt{2}),$$
$$v = -1 + z\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{z(z-1)}{1\,.\,2}(\sqrt{2}-1) + \frac{z(z-1)(z-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(1-\sqrt{2}).$$

---

110. — *La pression de la vapeur d'eau en mm. de mercure aux environs de* 100° *est donnée par le tableau suivant:*

t	99	99,5	100	100,5	101
p	733,24	746,52	760	773,69	787,58;

appliquer les diverses formules d'interpolation au calcul de la pression pour une température comprise entre 99,5 *et* 100,5.

En employant les notations du n° 192, nous formons le tableau des différences

t	p	δ^1	δ^2	δ^3	δ^4
99	733,24				
		$\delta^1_{-\frac{3}{2}} = 13,28$			
99,5	746,52		$\delta^2_{-1} = 0,20$		
		$\delta^1_{-\frac{1}{2}} = 13,48$		$\delta^3_{-\frac{1}{2}} = 0,01$	
100	760	$\sigma^1_0 = 13,585$	$\delta^2_0 = 0,21$	$\sigma^3_0 = 0$	$\delta^4_0 = -0,02$
		$\delta^1_{\frac{1}{2}} = 13,69$		$\delta^3_{\frac{1}{2}} = -0,01$	
100,5	773,69		$\delta^2_1 = 0,20$		
		$\delta^1_{\frac{3}{2}} = 13,89$			
101	787,58				

Nous n'insistons pas sur l'emploi de la formule de Newton, et nous utilisons les formules de Gauss en posant $z = \frac{x - 100}{0,5}$; après avoir calculé C^2_z, C^2_{z+1}, C^3_{z+1}, C^4_{z+1} et C^4_{z+2}, nous obtenons les résultats suivants :

1° Pour l'interpolation en avant de $x = 100$,

$$u = 760 + 13,69\frac{x-100}{0,5} + 0,21\frac{(x-100)(x-100,5)}{1\,.\,2\,.\,(0,5)^2}$$
$$-0,01\frac{(x-99,5)(x-100)(x-100,5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,(0,5)^3}$$
$$-0,02\frac{(x-99,5)(x-100)(x-100,5)(x-101)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,(0,5)^4};$$

2° Pour l'interpolation en arrière de $x = 100$,

$$u = 760 + 13,48\frac{x-100}{0,5} + 0,21\frac{(x-99,5)(x-100)}{1\,.\,2\,.\,(0,5)^2}$$
$$+0,01\frac{(x-99,5)(x-100)(x-100,5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,(0,5)^3}$$
$$-0,02\frac{(x-99)(x-99,5)(x-100)(x-100,5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,(0,5)^4};$$

3° Indifféremment, en avant et en arrière de $x=100$,

$$u = 760 + 13{,}585\frac{x-100}{0{,}5} + 0{,}21\frac{(x-100)^2}{1\,.\,2\,.\,(0{,}5)^2}$$
$$- 0{,}02\frac{(x-99{,}5)(x-100)^2(x-100{,}5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,(0{,}5)^4}.$$

Pour $x=100{,}2$, la 1re et la 3e formule donnent le même résultat : 765,4509.

---

111. — *Déterminer l'ordre infinitésimal et la partie principale des fonctions suivantes, où* x *est infiniment petit principal :*

$$1-\cos x,\qquad \operatorname{tg} x - \sin x,\qquad 2\sin x - \sin 2x - x^3,\qquad \sqrt{x}-\sqrt{\sin x},$$
$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\quad (a-b=x),\qquad e^x-\frac{2+x}{2-x},\qquad \log(1+x)-\frac{2x}{x+2}.$$

1° $\Delta y = 1-\cos x = \dfrac{x^2}{2}+\cdots,$

2° $\Delta y = \operatorname{tg} x - \sin x = \dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x} = \dfrac{x^3}{2}+\cdots,$

3° $\Delta y = 2\sin x - \sin 2x - x^3 = -\dfrac{x^5}{4}+\cdots,$

4° $\Delta y = \sqrt{x}-\sqrt{\sin x} = \dfrac{x-\sin x}{\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}} = \dfrac{\dfrac{x^3}{6}+\cdots}{2\sqrt{x}+\cdots} = \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{12}+\cdots,$

5° $\Delta y = \dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab} = \dfrac{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - ab}{\dfrac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}$

$$= \frac{\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2}{a+a+\cdots} = \frac{x^2}{8a}+\cdots,$$

6° $\Delta y = e^x - \dfrac{1+\dfrac{x}{2}}{1-\dfrac{x}{2}} = \left(1+\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^2}{1\,.\,2}+\dfrac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\cdots\right)$

$$-\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\cdots\right) = -\frac{x^3}{12}+\cdots,$$

$$7^\circ \quad \Delta y = \log(1+x) - \frac{x}{1+\frac{x}{2}} = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)$$

$$-x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots\right) = \frac{x^3}{12} + \cdots$$

---

112. — *Un cercle et une parabole étant représentés par les équations*

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0, \qquad x^2 - 2py = 0,$$

on considère x *comme infiniment petit principal; évaluer l'ordre infinitésimal et la partie principale de la différence entre les ordonnées des deux courbes correspondant à la même valeur de* x*; comment doit-on choisir* R *pour que l'ordre infinitésimal soit maximum?*

L'ordonnée d'un point du cercle s'annulant en même temps que l'abscisse est

$$y = R - \sqrt{R^2 - x^2} = R\left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\frac{x^2}{R} + \frac{1}{8}\frac{x^4}{R^3} + \cdots,$$

la différence entre les ordonnées des deux courbes est

$$\Delta = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{8}\frac{x^4}{R^3} + \cdots;$$

si $R \neq p$, cette différence est du second ordre; si $R = p$, elle est du quatrième ordre.

---

113. — *Déterminer les dérivées et les différentielles des fonctions implicites étudiées dans l'exercice* 84, *ainsi que des fonctions* y *et* z *définies par les équations*

$$x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy = a^2,$$
$$x + y + z = b.$$

En égalant entre elles les différentielles totales des deux membres des équations considérées, on a

1° $(2x-4y)\,dx+(-4x+2y)\,dy=0$, $\qquad dy=\dfrac{x-2y}{2x-y}\,dx$;

2° $(3x^2-3ay)\,dx+(3y^2-3ax)\,dy=0$, $\qquad dy=\dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}\,dx$;

3° $\cos y\,dy=n\cos x\,dx$, $\qquad dy=\dfrac{n\cos x}{\cos y}\,dx$

4° $\dfrac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$, $\qquad dy=\dfrac{x+y}{x-y}\,dx$;

5° $(2x+y+z)\,dx+(x+2y+z)\,dy+(x+y+2z)\,dz=0$,

$$dx+dy+dz=0;$$

on en tire

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}; \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{z-x}{y-z}, \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{x-y}{y-z}.$$

---

114. — *Étant données les deux fonctions*

$$X=f(x,y), \qquad Y=\varphi(x,y),$$

on suppose que l'on exprime x *et* y *au moyen de deux nouvelles variables* x_1 *et* y_1; *démontrer que l'on a*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x_1} & \dfrac{\partial Y}{\partial y_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y}{\partial y_1} \end{vmatrix}.$$

Chacun des déterminants qui entrent dans cette formule s'appelle déterminant fonctionnel ou jacobien des deux fonctions qu'il renferme par rapport aux variables dont elles dépendent.

En prenant les différentielles totales, on a

$$dX=\frac{\partial X}{\partial x}\,dx+\frac{\partial X}{\partial y}\,dy, \qquad dY=\frac{\partial Y}{\partial x}\,dx+\frac{\partial Y}{\partial y}\,dy,$$

$$dx=\frac{\partial x}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial x}{\partial y_1}\,dy_1, \qquad dy=\frac{\partial y}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial y}{\partial y_1}\,dy_1,$$

d'où

$$dX = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_1}\right)dy_1,$$

$$dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_1}\right)dy_1.$$

Les coefficients de dx_1 et dy_1 dans les seconds membres sont les dérivées partielles de X et de Y par rapport à x_1 et y_1; le déterminant fonctionnel formé au moyen de ces dérivées est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_1} \\ \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_1} \end{vmatrix};$$

on vérifie bien, en le développant, qu'il est égal au déterminant fonctionnel de X et Y par rapport à x et y, multipliées par le déterminant fonctionnel de x et y par rapport à x_1 et y_1.

---

115. — *Calculer les dérivées partielles du second ordre de l'expression* $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, *ainsi que de* $\frac{1}{r}$; *montrer que la fonction* $u = \frac{1}{r}$ *satisfait à la relation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

En prenant la différentielle totale de r, on a

$$dr = \frac{(x-a)}{r}dx + \frac{y-b}{r}dy + \frac{z-c}{r}dz,$$

et l'on en déduit les dérivées partielles

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-c}{r};$$

en prenant de même les différentielles totales de ces dérivées, on a

$$d\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dx}{r} - \frac{(x-a)dr}{r^2}$$
$$= \left[\frac{1}{r} - \frac{(x-a)^2}{r^3}\right]dx - \frac{(x-a)(y-b)}{r^3}dy - \frac{(x-a)(z-c)}{r^3}dz$$

et des formules analogues pour les autres dérivées; on en déduit les dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{(x-a)^2}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = -\frac{(x-a)(y-b)}{r^3}, \quad \ldots\ldots$$

On peut vérifier que l'on a identiquement

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}.$$

Pour la fonction $u = \frac{1}{r}$, on a de même $du = -\frac{dr}{r^2}$; on en déduit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y-b}{r^3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z-c}{r^3};$$

$$d\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{dx}{r^3} + \frac{3(x-a)dr}{r^4} = \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5}\right]dx$$
$$+ \frac{3(x-a)(y-b)}{r^5}dy + \frac{3(x-a)(z-c)}{r^5}dz;$$

on en déduit les dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{3(x-a)(y-b)}{r^5}, \quad \ldots;$$

on vérifie que l'on a identiquement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

---

116. — *La pression* p *d'un gaz parfait est liée à son volume* v *et à la température absolue* T *par la formule* $pv = \mathrm{R}\mathrm{T}$, *où* R *est une constante. Montrer que la différentielle totale de* p *est donnée par la formule*

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}} - \frac{dv}{v}.$$

En égalant les différentielles totales des deux membres de l'équation donnée, on a

$$pdv + vdp = \mathrm{R}d\mathrm{T}$$

et, en divisant les deux membres par pv ou RT, on a la relation

$$\frac{dp}{p}+\frac{dv}{v}=\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}}.$$

En prenant les différentielles logarithmiques des deux membres de l'équation donnée, on arriverait au même résultat.

---

117. — *Former à priori les différentielles totales des fonctions étudiées dans l'exercice* 83, *et en déduire les dérivées partielles de ces fonctions.*

1°
$$d\left(\frac{x+y}{xy}\right)=d\frac{1}{x}+d\frac{1}{y}=-\frac{dx}{x^2}-\frac{dy}{y^2}.$$

2°
$$d \operatorname{arc} \operatorname{tg}\frac{x+y}{1-xy}=\frac{(dx+dy)(1-xy)+(x+y)(xdy+ydx)}{(1-xy)^2+(x+y)^2}$$
$$=\frac{dx(1+y^2)+dy(1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}.$$

3°
$$d\frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}=\frac{(xdy+ydx)(1+x^2+y^2)-xy(xdx+ydy)}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{y(1+y^2)dx+x(1+x^2)dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

4°
$$de^{xyz}=e^{xyz}(yzdx+zxdy+xydz).$$

Les dérivées partielles sont les coefficients de dx, dy, dz dans les seconds membres.

---

118. — *Transformer les expressions*

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},\qquad x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

lorsqu'on passe des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, u étant une fonction de x et y.

1° D'après les formules de transformation (n° 200), on a

$$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{1}{\rho^2}\left[\rho\cos\theta(d\rho\sin\theta+\rho\cos\theta d\theta)\right.$$
$$\left.-\rho\sin\theta(d\rho\cos\theta-\rho\sin\theta d\theta)\right]=d\theta\ ;$$

cela résulte encore de la relation $\theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$ et de la différentiation de cette relation.

2° Des formules (7) du n° 206, on déduit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta$$

et l'on en tire

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \rho\frac{\partial u}{\partial \rho}; \qquad x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = \rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos 2\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\sin 2\theta.$$

3° En dérivant, par rapport à ρ et θ, les deux membres des équations donnant $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, considérés comme fonctions composées de ρ et θ, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin\theta = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\cos\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}\sin\theta + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\theta = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\sin\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}\cos\theta - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-\rho\sin\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\rho\cos\theta$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}\cos\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\sin\theta - \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(-\rho\sin\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\rho\cos\theta$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}\sin\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta.$$

On peut en tirer les dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ et former la somme des deux premières, mais on voit encore qu'en multipliant les équations respectivement par $\cos\theta$, $\sin\theta$, $-\frac{\sin\theta}{\rho}$, et $-\frac{\cos\theta}{\rho}$ et les ajoutant, on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

119. — *Transformer les expressions*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

lorsqu'on passe des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires dans l'espace.

1° Les formules de transformation (n° 109)

$$x = \rho \sin\theta \cos\psi, \qquad y = \rho \sin\theta \sin\psi, \qquad z = \rho\cos\theta$$

donnent

$$\begin{aligned} dx &= d\rho \sin\theta\cos\psi + \rho\cos\theta\cos\psi\, d\theta - \rho\sin\theta\sin\psi\, d\psi,\\ dy &= d\rho \sin\theta\sin\psi + \rho\cos\theta\sin\psi\, d\theta + \rho\sin\theta\cos\psi\, d\psi,\\ dz &= d\rho\cos\theta \qquad\qquad - \rho\sin\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

Les dérivées partielles de x, y, z par rapport à ρ, θ, ψ sont les coefficients de $d\rho, d\theta, d\psi$ dans les seconds membres ; on voit de plus, en formant la somme des carrés des équations précédentes, que l'on a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\psi^2.$$

2° Par un raisonnement analogue à celui du n° 206, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta\cos\psi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\sin\psi + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta,\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta\cos\psi + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta\sin\psi - \frac{\partial u}{\partial z}\sin\theta,\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \psi} &= -\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta\sin\psi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\cos\psi ; \end{aligned}$$

comme dans l'exercice précédent, nous en tirerons les dérivées

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\theta\cos\psi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta\cos\psi - \frac{\sin\psi}{\rho\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \psi},\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\theta\sin\psi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta\sin\psi + \frac{\cos\psi}{\rho\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \psi},\\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\theta \qquad\qquad - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta, \end{aligned}$$

et nous trouverons

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2$$

3° Comme dans l'exercice précédent, on considère les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ comme des fonctions composées de ρ, θ, ψ et l'on prend les dérivées partielles des deux membres des équations précédentes par rapport à ρ, θ et ψ ; on obtient ainsi neuf équations, dont les premiers membres sont de la forme

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\alpha_i + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\beta_i + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\gamma_i, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\alpha_i + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\beta_i + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\gamma_i, \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\alpha_i + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\beta_i + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\gamma_i, \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = \sin\theta\cos\psi, & \beta_1 = \sin\theta\sin\psi, & \gamma_1 = \cos\theta, \\ \alpha_2 = \rho\cos\theta\cos\psi, & \beta_2 = \rho\cos\theta\sin\psi, & \gamma_2 = -\rho\sin\theta, \\ \alpha_3 = -\rho\sin\theta\sin\psi, & \beta_3 = \rho\sin\theta\cos\psi, & \gamma_3 = 0, \end{array}$$

et dont les seconds membres, qu'il est facile de former et que nous n'écrivons pas, renferment les dérivées premières et secondes de u par rapport à ρ, θ et ψ. En multipliant les deux membres de ces neuf équations respectivement par α_1, β_1, γ_1, $\frac{\alpha_2}{\rho^2}$, $\frac{\beta_2}{\rho^2}$, $\frac{\gamma_2}{\rho^2}$, $\frac{\alpha_3}{\rho^2\sin^2\theta}$, $\frac{\beta_3}{\rho^2\sin^2\theta}$, 0, et ajoutant membre à membre, on obtient la relation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

IV. — EXERCICES SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

120. — *Déterminer par la trigonométrie les racines réelles, puis les racines imaginaires des équations*

$$x^5 - 1 = 0, \qquad x^6 - 1 = 0, \qquad x^8 - 1 = 0;$$

les calculer ensuite algébriquement en utilisant la méthode de résolution des équations réciproques.

Les racines de $x^m - 1 = 0$ sont $\cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}$.

1° Pour $m = 5$, les racines sont : une réelle égale à 1 et

$$\cos \frac{2\pi}{5} \pm i \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\cos \frac{4\pi}{5} \pm i \sin \frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5} - 1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

2° Pour $m = 6$, les racines sont : deux réelles égales à ± 1 et

$$\cos \frac{2\pi}{6} \pm i \sin \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos \frac{4\pi}{6} \pm i \sin \frac{4\pi}{6} = \frac{-1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3 Pour $m = 8$, les racines sont deux réelles égales à ± 1, deux imaginaires pures égales à $\pm i$, et

$$\cos \frac{2\pi}{8} \pm i \sin \frac{2\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos \frac{6\pi}{8} \pm i \sin \frac{6\pi}{8} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pour résoudre algébriquement ces équations, on divise d'abord le premier membre par les facteurs $x \pm 1$ qu'il peut posséder ; en égalant à zéro le quotient, on a une équation réciproque que l'on résout en divisant d'abord son premier membre par une puissance de x dont l'exposant est la moitié du degré, et posant ensuite $x + \frac{1}{x} = z$. A

chaque racine de l'équation en z obtenue correspondent deux valeurs de x tirées de l'équation $x^2 - xz + 1 = 0$ et égales à $\frac{z}{2} \pm i\frac{\sqrt{4 - z^2}}{2}$.

1° $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

$$= (x - 1)x^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1\right).$$

Par la transformation $x + \frac{1}{x} = z$, le dernier facteur égalé à zéro conduit à l'équation

$$z^2 + z - 1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

et on en déduit les valeurs de x déjà calculées.

2° $x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x^2 - 1)x^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right)$;

le dernier facteur égalé à zéro conduit à l'équation

$$z^2 - 1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad z = \pm 1, \qquad x = \pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3° $x^8 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$

$$= (x^2 - 1)(x^2 + 1)x^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right);$$

le dernier facteur égalé à zéro conduit à l'équation

$$z^2 - 2 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad z = \pm\sqrt{2}, \qquad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

---

121. — *Former les équations qui donnent* $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{4}$ *et* $\operatorname{tg}\frac{a}{5}$ *connaissant* $\operatorname{tg} a$; *application au cas où l'on a* $a = \frac{\pi}{2}$ *ou* $a = \pi$.

En utilisant les formules (6) et (9) du n° 211, on a à résoudre les équations

$$\operatorname{tg}^3\frac{a}{3} - 3\operatorname{tg}\frac{a}{3} - \operatorname{tg} a\left(3\operatorname{tg}^2\frac{a}{3} - 1\right) = 0,$$

$$\operatorname{tg} a\left(\operatorname{tg}^4\frac{a}{4} - 6\operatorname{tg}^2\frac{a}{4} + 1\right) + \left(4\operatorname{tg}^3\frac{a}{4} - 4\operatorname{tg}\frac{a}{4}\right) = 0,$$

$$\operatorname{tg}^5\frac{a}{5} - 10\operatorname{tg}^3\frac{a}{5} + 5\operatorname{tg}\frac{a}{5} - \operatorname{tg} a\left(5\operatorname{tg}^4\frac{a}{5} - 10\operatorname{tg}^2\frac{a}{5} + 1\right) = 0.$$

Pour $a = \frac{\pi}{2}$, la première se réduit au second degré ; elle a une racine infinie et les racines de $3\,\mathrm{tg}^2\frac{a}{3} - 1 = 0$; ses racines sont

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = +\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) = \infty, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

La deuxième se réduit à $\mathrm{tg}^4\frac{a}{4} - 6\,\mathrm{tg}^2\frac{a}{4} + 1 = 0$ et a pour racines

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{3-\sqrt{8}}, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3+\sqrt{8}},$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{4}\right) = -\sqrt{3+\sqrt{8}}, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{3-\sqrt{8}}.$$

La troisième se réduit au quatrième degré ; elle a une racine infinie et les racines de $5\,\mathrm{tg}^4\frac{a}{5} - 10\,\mathrm{tg}^2\frac{a}{5} + 1 = 0$; ses racines sont

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{10} = \sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}},$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}\right) = \infty, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3\pi}{5}\right) = -\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}},$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi}{5}\right) = -\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}.$$

Pour $a = 0$ ou π, la première se réduit à $\mathrm{tg}^3\frac{a}{3} - 3\,\mathrm{tg}\frac{a}{3} = 0$ et ses racines sont

$$\mathrm{tg}\,0 = 0, \quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad \mathrm{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

La deuxième se réduit au troisième degré, elle a une racine infinie et les racines de $4\,\mathrm{tg}^3\frac{a}{4} - 4\,\mathrm{tg}\frac{a}{4} = 0$; ses racines sont

$$\mathrm{tg}\,0 = 0, \quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1, \quad \mathrm{tg}\frac{2\pi}{4} = \infty, \quad \mathrm{tg}\frac{3\pi}{4} = -1.$$

La troisième se réduit à

$$\mathrm{tg}^5\frac{a}{5} - 10\,\mathrm{tg}^3\frac{a}{5} + 5\,\mathrm{tg}\frac{a}{5} = 0$$

et a pour racines

$$\operatorname{tg} 0 = 0, \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{4\pi}{5} = -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}.$$

---

122. — *Pour trouver les sommes des deux séries*

$$S_1 = 1 + \rho \cos \alpha + \rho^2 \cos 2\alpha + \cdots + \rho^n \cos n\alpha + \cdots,$$
$$S_2 = \rho \sin \alpha + \rho^2 \sin 2\alpha + \cdots + \rho^n \sin n\alpha + \cdots,$$

on forme une nouvelle série en ajoutant aux termes de la première les produits par i *des termes correspondants de la seconde; montrer que cette nouvelle série peut se mettre sous la forme d'une progression géométrique; évaluer sa somme et la mettre sous la forme* $A + Bi$, A *et* B *étant réels; en déduire les valeurs de* S_1 *et de* S_2.

Les deux séries sont convergentes lorsque ρ est inférieur à l'unité en valeur absolue; la série

$$S_1 + i S_2 = 1 + \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha) + \rho^2 (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + \cdots$$
$$= 1 + \rho e^{i\alpha} + \rho^2 e^{2i\alpha} + \cdots$$

est une progression géométrique de raison $q = \rho e^{i\alpha}$; sa somme est

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \rho \cos \alpha - i\rho \sin \alpha} = \frac{(1 - \rho \cos \alpha) + i\rho \sin \alpha}{(1 - \rho \cos \alpha)^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha};$$

on en déduit, en égalant séparément les termes réels et les coefficients de i,

$$S_1 = \frac{1 - \rho \cos \alpha}{1 - 2\rho \cos \alpha + \rho^2}, \qquad S_2 = \frac{\rho \sin \alpha}{1 - 2\rho \cos \alpha + \rho^2}.$$

---

123. — *Évaluer* $\cos^4 a$ *et* $\sin^4 a$ *en fonction linéaire des sinus et des cosinus de* a *et de ses multiples.*

$$\cos^4 a = \left(\frac{1 + \cos 2a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2a}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4a}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{\cos 2a}{2} + \frac{\cos 4a}{8};$$

$$\sin^4 a = \left(\frac{1-\cos 2a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2a}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4a}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{8} - \frac{\cos 2a}{2} + \frac{\cos 4a}{8};$$

les formules du n° 217 conduisent au même résultat.

---

124. — *Montrer que le trinome bicarré à coefficients réels*

$$x^4 + px^2 + q$$

peut être décomposé de trois façons en un produit de deux trinomes du second degré, et que pour l'une au moins des décompositions les trinomes ont leurs coefficients réels; appliquer à $x^4 + x^2 + 1$.

Soient x_1, x_2, $-x_1$, $-x_2$ les racines de l'équation; on a

$$x^4 + px^2 + q = (x - x_1)(x - x_2)(x + x_1)(x + x_2);$$

on peut réunir les facteurs du second membre en deux groupes de deux P_i, Q_i, de trois manières différentes :

$$P_1 = (x - x_1)(x + x_1), \qquad Q_1 = (x - x_2)(x + x_2),$$
$$P_2 = (x - x_1)(x - x_2), \qquad Q_2 = (x + x_1)(x + x_2),$$
$$P_3 = (x - x_1)(x + x_2), \qquad Q_3 = (x + x_1)(x - x_2).$$

Si les quatre racines sont réelles, les trois décompositions sont réelles. Si deux racines x_1, $-x_1$ sont réelles, et les deux autres x_2, $-x_2$ imaginaires, la décomposition P_1, Q_1 est seule réelle. Si les racines sont toutes imaginaires, x_2 étant conjugué de x_1 la décomposition P_2, Q_2 est seule réelle.

Dans les deux premiers cas, la décomposition du trinome $z^2 + pz + q$ en facteurs linéaires conduit à une décomposition du trinome bicarré en facteurs du second degré à coefficients réels

$$x^4 + px^2 + q = \left(x^2 + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x^2 + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right);$$

dans le dernier cas, q et $4q - p^2$ sont positifs; on peut considérer x^4 et q comme le premier et le dernier terme d'un carré, et écrire

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 + \sqrt{q})^2 - (2\sqrt{q} - p)\,x^2$$
$$= \left[x^2 + \sqrt{2\sqrt{q} - p}\,x + \sqrt{q}\right]\left[x^2 - \sqrt{2\sqrt{q} - p}\,x + \sqrt{q}\right].$$

Exemple :

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

---

125. — *Étant donnée une équation algébrique, exprimer en fonction de ses coefficients la somme des carrés de ses racines, ainsi que celle de leurs cubes, de leurs inverses, des carrés de leurs inverses. Former l'équation qui a pour racines les carrés des racines, ou les inverses des racines de l'équation donnée; appliquer à l'équation du troisième degré.*

Soit une équation

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m = 0;$$

des formules du n° 220 résultent les relations

$$\Sigma x_1^2 = (\Sigma x_1)^2 - 2\Sigma x_1x_2 = \frac{A_1^2 - 2A_0A_2}{A_0^2},$$

$$\Sigma x_1^3 = (\Sigma x_1)^3 - 3(\Sigma x_1)(\Sigma x_1x_2) + 3\Sigma x_1x_2x_3 = \frac{-A_1^3 + 3A_0A_1A_2 - 3A_0^2A_3}{A_0^3},$$

$$\Sigma\frac{1}{x_1} = \frac{\Sigma x_2x_3\cdots x_m}{x_1x_2\cdots x_m} = -\frac{A_{m-1}}{A_m}.$$

$$\Sigma\frac{1}{x_1^2} = \left(\Sigma\frac{1}{x_1}\right)^2 - 2\Sigma\frac{1}{x_1x_2} = \left(\Sigma\frac{1}{x_1}\right)^2 - 2\frac{\Sigma x_3x_4\cdots x_m}{x_1x_2\cdots x_m}$$

$$= \frac{A_{m-1}^2 - 2A_mA_{m-2}}{A_m^2}.$$

Si y est le carré d'une racine x de l'équation donnée, on a $y = x^2$, $x = \sqrt{y}$; on pourrait remplacer x par $\sqrt{y}$ dans l'équation donnée, mais il y aurait un radical à faire disparaître; il est préférable de diriger le calcul rationnellement, en séparant les termes de l'équation en termes de degrés pairs et termes de degrés impairs et écrire

$$A_m + A_{m-2}x^2 + \cdots = -x(A_{m-1} + A_{m-3}x^2 + \cdots);$$

en élevant les deux membres au carré, et remplaçant x^2 par y, on obtient

$$(A_m + A_{m-2}y + \cdots)^2 = y(A_{m-1} + A_{m-3}y + \cdots)^2;$$

l'équation est de même degré que l'équation donnée.

Si y est l'inverse d'une racine x de l'équation, on a $y = \frac{1}{x}$, d'où $x = \frac{1}{y}$; en remplaçant x par $\frac{1}{y}$ et chassant le dénominateur, on obtient l'équation cherchée

$$A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + \cdots + A_1 y + A_0 = 0.$$

On peut retrouver la somme des inverses des racines $x_1, x_2, \ldots$ et celle des carrés de ces inverses, en formant la somme des racines de l'équation précédente et celle des carrés de ces racines.

Si l'équation est du troisième degré de la forme $x^3 + px + q = 0$, on a

$$\Sigma x_1^2 = -2p, \quad \Sigma x_1^3 = -3q, \quad \Sigma \frac{1}{x_1} = \frac{-p}{q}, \quad \Sigma \frac{1}{x_1^2} = \frac{p^2 - 2pq}{q^2};$$

l'équation aux carrés des racines, obtenue en écrivant l'équation sous la forme $x(x^2 + p) = -q$ et élevant les deux membres au carré est

$$y(y+p)^2 = q^2,$$

et l'équation aux inverses est

$$qy^3 + py^2 + 1 = 0.$$

---

126. — *Étant donnée une équation algébrique de degré m, former l'équation qui admet pour racines les racines de cette équation augmentées d'un nombre h; peut-on choisir h pour que le coefficient du terme de degré $m-1$ dans la nouvelle équation soit nul? Appliquer à l'équation du quatrième degré.*

Si x est une racine de l'équation donnée, et y la racine correspondante de l'équation cherchée, on a $y = x + h$, d'où $x = y - h$, il suffit donc de remplacer x par $y - h$, ce qui donne

$$A_0 y^m + (A_1 - mhA_0) y^{m-1} + \left[A_2 - (m-1)hA_1 + \frac{m(m-1)}{1.2} h^2 A_0\right] y^{m-2} + \cdots = 0;$$

il suffit de prendre $h = \frac{A_1}{mA_0}$ pour faire disparaître le deuxième terme.

Si l'équation donnée est du quatrième degré, on a $h = \frac{A_1}{4A_0}$ et la nouvelle équation a la forme $A_0 y^4 + A_2' y^2 + A_3' y + A_4' = 0$.

---

127. — *Pour quelles valeurs de a l'équation*

$$x^4 - 4x^2 + 4ax - 1 = 0$$

a-t-elle une racine double? Déterminer pour ces valeurs de a les quatre racines de l'équation.

L'équation dérivée est $x^3 - 2x + a = 0$; cherchons la condition pour qu'elle ait une racine commune avec l'équation proposée. En opérant par la méthode de recherche du plus grand commun diviseur (n° 223) on écrit

$$x^4 - 4x^2 + 4ax - 1 = x(x^3 - 2x + a) - 2x^2 + 3ax - 1,$$

$$x^3 - 2x + a = (-2x^2 + 3ax - 1)\left(-\frac{x}{2} - \frac{3}{4}a\right) + \left(\frac{9a^2 - 10}{4}\right)x + \frac{a}{4};$$

s'il existe une racine double, elle doit avoir pour valeur $x = \frac{-a}{9a^2 - 10}$ et doit annuler le diviseur $-2x^2 + 3ax - 1$ de la dernière division, de sorte que l'on doit avoir, en substituant à x la valeur précédente et réduisant,

$$27a^4 - 52a^2 + 25 = 0.$$

Les racines de cette équation sont $a = \pm 1$ et $\pm \frac{5\sqrt{3}}{9}$, et à chaque valeur de a correspond une racine double $x = \frac{-a}{9a^2 - 10}$.

Pour $a = 1$, l'équation $x^4 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$ a pour racine double 1; les autres racines étant celles de $x^2 + 2x - 1 = 0$.

Pour $a = -1$, l'équation $x^4 - 4x^2 - 4x - 1 = 0$ a pour racine double $x = -1$, les autres étant celles de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Pour $a = \pm \frac{5\sqrt{3}}{9}$, l'équation $x^4 - 4x^2 \pm \frac{20\sqrt{3}}{9}x - 1 = 0$ a une racine double, $x = \frac{3a}{5} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, et les autres racines sont celles de l'équation $x^2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 3 = 0$.

---

128. — *Étant donnée la courbe représentée par l'équation $y^2 = x^3$, trouver la relation qui doit exister entre h et m pour que la droite représentée par $y = mx + h$ soit tangente à la courbe; on écrira que deux des points de rencontre de la droite et de la courbe sont confondus.*

Les abscisses des points de rencontre de la courbe $y^2 = x^3$ et de la droite $y = mx + h$ sont les racines de l'équation $x^3 = (mx + h)^2$; pour que cette équation ait une racine double, il faut qu'elle ait une racine commune avec sa dérivée

$$3x^2 = 2m(mx + h).$$

En divisant membre à membre les deux équations et supposant x différent de 0, on a $\frac{x}{3} = \frac{mx + h}{2m}$, $x = -\frac{3h}{m}$; en écrivant que cette valeur de x satisfait à l'équation dérivée, on trouve la condition

$$h(4m^3 + 27h) = 0.$$

La solution $h = 0$ fournit les droites qui coupent la courbe en deux points confondus à l'origine; l'autre solution conduit aux droites d'équation $y = mx - \frac{4m^3}{27}$, qui sont tangentes à la courbe chacune au point de coordonnées $x = \frac{4m^2}{9}$ et $y = \frac{8m^3}{27}$.

---

129. — *Déterminer les dimensions d'un cône de révolution dont on donne le volume et l'apothème; discuter.*

Soient x la hauteur, y le rayon de la base, a l'apothème et $\frac{\pi m^3}{3}$ le volume du cône; x et y sont déterminés par les équations

$$xy^2 = m^3, \qquad x^2 + y^2 = a^2;$$

en éliminant y, on obtient l'équation

$$x^3 - a^2x + m^3 = 0.$$

Nous pouvons supposer $m > 0$, du reste le changement de m en $-m$ aurait simplement pour effet de changer le signe des racines.

L'équation dérivée $3x^2 - a^2 = 0$ a pour racines $x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$; les résultats de substitution des racines de l'équation dérivée et des nombres $-\infty$, 0, a, $+\infty$ dans le premier membre de l'équation ont les signes donnés par le tableau suivant:

$-\infty$	$\frac{-a\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	a	$+\infty$
$-$	$+$	$+$	$m^3 - \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$	$+$	$+$

Si $m^3 < \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$, l'équation a trois racines réelles, une négative et les deux autres positives et inférieures à a ; le problème a alors deux solutions. Si $m^3 = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$, l'équation a deux racines positives et égales à $\frac{a\sqrt{3}}{9}$ et une racine négative; le problème a une solution; enfin si $m^3 > \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$, l'équation n'a plus qu'une seule racine réelle négative et le problème n'a plus de solution. On peut comparer cet exercice à celui du n° 77.

---

130. — *Déterminer les dimensions d'une chaudière formée d'un cylindre de révolution terminé par deux demi-sphères de même rayon que le cylindre, connaissant le volume et la surface totale; discuter.*

Soient $4\pi a^2$ la surface totale et $\frac{4}{3}\pi b^3$ le volume de la chaudière, a et b étant supposés positifs; soient x le rayon des bases et y la hauteur du cylindre, on a les équations

$$S = 2\pi xy + 4\pi x^2 = 4\pi a^2, \qquad V = \pi x^2 y + \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{4}{3}\pi b^3;$$

x et y sont donnés par le système

$$f(x) = x^3 - 3a^2 x + 2b^3 = 0, \qquad y = \frac{2(a^2 - x^2)}{x}.$$

La dérivée $f'(x)$ est égale à $3(x^2 - a^2)$ et s'annule pour $x = \pm a$;

en raisonnant comme dans le problème précédent, on obtient les résultats suivants :

1° $a < b$; l'équation $f(x) = 0$ a une seule racine réelle x_1 négative et inférieure à $-a$; pour cette valeur, y est positif. La valeur absolue de la racine x_1 ne convient pas au problème proposé, mais à celui où $4\pi a^2$ est égal à la surface de la sphère diminuée de celle du cylindre, et où $\frac{4}{3}\pi b^3$ est égal au volume du cylindre diminué de celui de la sphère.

2° $a > b$; l'équation a trois racines réelles, l'une x_1 négative et inférieure à $-a$, que l'on interprèterait comme précédemment : la deuxième x_2 comprise entre 0 et a, rendant y positive et convenant au problème proposé, et la troisième x_3 supérieure à a ; celle-ci donne pour y une valeur négative et elle convient au problème où $4\pi a^2$ est égal à la surface de la sphère diminuée de celle du cylindre et où $\frac{4}{3}\pi b^3$ est égal au volume de la sphère diminué de celui du cylindre.

---

131. — *Couper le volume d'un hémisphère en deux parties équivalentes par un plan parallèle à la base ; résoudre numériquement l'équation dont dépend le rapport entre la hauteur de l'une de ces parties et le rayon de l'hémisphère.*

Soit x la hauteur d'un segment sphérique à deux bases dont l'une est un plan diamétral ; en écrivant que le volume de ce segment est égal au quart du volume de la sphère de rayon R, on obtient l'équation

$$\frac{1}{3}\pi x(3R^2 - x^2) = \frac{1}{3}\pi R^3$$

ou

$$f(x) = x^3 - 3R^2x + R^3 = 0.$$

Ses racines sont réelles ; on les calcule numériquement (n° 228) en posant $x = 2R \cos \frac{\theta}{3}$, ce qui conduit à l'équation

$$\cos^3 \frac{\theta}{3} - \frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{3} - \frac{1}{8} = 0.$$

En la comparant à l'équation (3) du n° 228, on voit que l'on a $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, d'où $\theta = \frac{2\pi}{3}$; les trois racines sont donc

$$x_1 = 2R\cos\frac{2\pi}{9} = 1{,}552\,R\,; \qquad x_2 = 2R\cos\frac{8\pi}{9} = -1{,}879\,R\,;$$

$$x_3 = 2R\cos\frac{14\pi}{9} = 0{,}3473\,R\,;$$

la dernière seule convient au problème.

---

132. — *Une sphère homogène de rayon* R *et de densité* d *flotte sur un liquide de densité* d' ; *déterminer la hauteur de la calotte plongée dans le liquide.*

La hauteur x de la calotte satisfait à l'équation

$$\frac{1}{3}\pi x^2(3R - x)d' = \frac{4}{3}\pi R^3 d\,;$$

pour obtenir une équation du troisième degré ayant la forme classique, nous formerons l'équation aux inverses, en posant $x = \frac{2R}{y}$, ce qui donne l'équation

$$f(y) = y^3 - 3\frac{d'}{d}y + 2\frac{d'}{d} = 0.$$

La quantité $4p^3 + 27q^2$ est égale à $4\cdot 27\left(\frac{d'}{d}\right)^2\left(1 - \frac{d'}{d}\right)$; de plus, les résultats de substitution de 1 et de $+\infty$ dans $f(y)$ ont les signes de $1 - \frac{d'}{d}$ et de $+\infty$. Si d' est inférieur à d, l'équation a une seule racine réelle négative et le problème n'a aucune solution ; si d' est supérieur à d, l'équation a trois racines réelles dont une seule est supérieure à l'unité, et à cette racine correspond une solution unique du problème.

---

133. — *Résoudre numériquement les équations*

$$x^3 + x - 1 = 0, \qquad x^3 - 5x^2 - 60x + 108 = 0.$$

1° L'équation $x^3 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle qui est comprise entre 0,6 et 0,7, comme le montrent les résultats de substitution. On peut calculer une valeur plus approchée de cette racine en substituant dans le premier membre des nombres compris entre 0,6 et 0,7 ou par d'autres méthodes ; en particulier les formules de Cardan (n° 229) donnent

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{91}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{91}}{18}} = 1{,}0099 - 0{,}3106 = 0{,}6993,$$

les calculs étant faits à l'aide des logarithmes.

2° Les racines rationnelles que peut avoir l'équation

$$x^5 - 5x^2 - 60x + 108 = 0$$

sont comprises parmi les diviseurs de ± 108 ; on vérifie que l'équation a une racine double égale à 2 et une racine simple égale à 3 ; en divisant le premier membre successivement par $(x-2)$, $(x-2)$, $(x+3)$, on a comme quotient $x^2 + x + 9$ qui, égalé à zéro, fournit les deux autres racines $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{35}}{2}$.

---

134. — *Démontrer que l'équation*

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots + \frac{L}{x-l} = 0,$$

où A, B, C, ... L *sont des nombres de même signe, a toutes ses racines réelles et séparées par les nombres,* $a, b, c, \dots l$.

On peut supposer les nombres A, B, C, ... positifs ; les signes des résultats de substitution dans le premier membre des nombres $a+\varepsilon$, $b-\varepsilon$, $b+\varepsilon$, ..., où ε est très petit, sont donnés par le tableau

$a+\varepsilon$	$b-\varepsilon$	$b+\varepsilon$	$c-\varepsilon$	$c+\varepsilon$	...	$l-\varepsilon$
+	—	+	—	+		—

le degré de l'équation est égal au nombre des intervalles précédents et chacun d'eux comprend une racine (n° 234) ; les racines sont donc toutes réelles et séparées par $a, b, \dots, l$.

---

135. — *Étant donnée une équation algébrique* $f(x) = 0$, *de degré* n, *dont le premier coefficient est positif, on forme les dérivées successives* $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$, *la dernière étant un polynome du premier degré ; on calcule le plus petit nombre entier* x_1 *qui rend* $f^{(n-1)}(x)$ *positive, puis on substitue dans* $f^{(n-2)}(x)$ *les nombres entiers à partir de* x_1, *jusqu'à ce qu'on trouve un nombre* x_2 *égal ou supérieur à* x_1 *rendant* $f^{(n-2)}(x)$ *positive ; on substitue de même dans* $f^{(n-3)}(x)$ *les nombres entiers à partir de* x_2 *jusqu'à ce que le résultat soit positif, et ainsi de suite jusqu'à la fonction* $f(x)$ *elle-même ; montrer que pour toute valeur de* x *égale ou supérieure au dernier nombre obtenu* x_n, $f(x)$ *est positive et non nulle, de sorte que* x_n *est une limite supérieure des racines réelles et positives de l'équation ; cette limite a été donnée par Newton.*

Pour tout nombre égal ou supérieur à x_1, la dérivée $f^{(n-1)}(x)$ est nulle ou positive, par suite la fonction $f^{(n-2)}(x)$ est croissante ; dès lors elle est sûrement nulle ou positive pour tout nombre égal ou supérieur à x_2. De la même manière, pour ces valeurs, la fonction $f^{(n-3)}(x)$ est croissante, et l'on peut continuer le raisonnement jusqu'au polynome $f(x)$ lui-même ; donc pour toute valeur égale ou supérieure à x_{n-1}, la fonction $f(x)$ est croissante, et elle est positive pour tout nombre égal ou supérieur à x_n. Elle n'a donc aucune racine supérieure à ce dernier nombre, et celui-ci se trouve être une limite supérieure des racines réelles et positives de l'équation.

---

136. — *Séparer et calculer numériquement les racines réelles des équations*

1° $x^4 - 4x^2 - 16x + 20 = 0$, 2° $e^x - 4x = 0$,

3° $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = x$, 4° $x = 1{,}8\,(1 + \log x)$,

5° $(1{,}0077)^x - 9{,}12x = 12\,000$, 6° $x - \cos x = 0$,

7° $x - 2\sin x = 0$, 8° $\operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{2}{x}$;

on a à résoudre la troisième lorsque l'on cherche le point de contact d'une chaînette et d'une tangente à cette courbe issue de l'origine ; la quatrième et la cinquième se présentent lorsque l'on cherche, avec

des données numériques particulières, le degré de détente d'une machine à vapeur ou la température du foyer d'une chaudière, et la sixième se présente lorsque l'on demande de couper la surface d'un demi-cercle en deux parties équivalentes par une parallèle au diamètre.

1° L'équation dérivée $x^3 - 2x - 4 = 0$ n'a qu'une racine réelle $x = 2$ donnant un résultat de substitution négatif dans le premier membre de l'équation donnée ; celle-ci a donc deux racines réelles, l'une inférieure et l'autre supérieure à 2.

On peut calculer les limites de ces racines (n° 232) ; elles sont $+6, -2$; mais on voit immédiatement par les signes des résultats de substitution des nombres voisins de 2 dans le premier membre que l'une des racines x_1 est comprise entre 1 et 2 et l'autre x_2 entre 2 et 3.

La substitution de nombres décimaux montre que l'on a

$$f(1) = +1, \qquad f(1,1) = -0,9756,$$
$$f(2,6) = -2,9425, \qquad f(2,7) = +0,7841.$$

La méthode des parties proportionnelles (n° 237) donne pour valeurs approchées

$$x_1' = 1 + \frac{0,1}{1 + 0,9756} = 1,050617\ldots;$$

$$x_2' = 2,6 + \frac{0,29425}{2,9425 + 0,7841} = 2,678959\ldots$$

Pour appliquer la méthode de Newton (n° 238), commençons par prendre la dérivée seconde $f''(x) = 4(3x^2 - 2)$; elle est positive dans les intervalles considérés ; on est donc amené à appliquer la méthode aux nombres 1 et 2,7 et elle donne

$$x_1'' = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 + \frac{1}{20} = 1,05;$$

$$x_2'' = 2,7 - \frac{f(2,7)}{f'(2,7)} = 2,7 - \frac{0,7841}{41,132} = 2,680937\ldots$$

Pour calculer l'erreur dont est affectée une valeur de x fournie par la méthode de Newton, il faut trouver le maximum de $\frac{h^2}{2} \cdot \frac{f''(a + \theta h)}{f'(a)}$; pour x_1'' déduit de la valeur $a = 1$, on a

$$h < 0,051, \qquad f'' < 6,6, \qquad f'(a) = 20,$$

on en conclut que l'erreur dont est affectée la valeur 1,05 est inférieure à 0,0005 et que la racine est comprise entre 1,05 et 1,0505.

Pour x''_2 déduit de la valeur $a = 2,7$, on a

$$|h| < 0,022, \quad f'' < 80, \quad f' > 40,$$

on en conclut que l'erreur dont est affectée x''_2 est également inférieure à 0,0005 et que la racine est comprise entre 2,68094 et 2,6804. Les figures 26 donnent la représentation géométrique de la fonction et des valeurs approchées des racines; l'échelle des abscisses a été amplifiée pour la facilité du dessin.

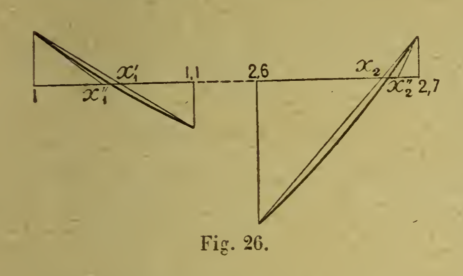


Fig. 26.

2° L'équation dérivée $f'(x) = e^x - 4 = 0$ a pour racine

$$x = \log 4 = 1,3863...$$

dont le résultat de substitution dans $f(x)$ est négatif; les résultats de substitution de 0 et de $+\infty$ étant positifs, l'équation a une racine positive inférieure à 1,38 et une supérieure à ce nombre.

A l'aide d'une table de multiples du module $M = 0,4343...$ ou de logarithmes népériens, on trouve

$$f(0,35) = 0,01907..., \qquad f(0,36) = -0,0668...;$$

en appliquant la méthode des parties proportionnelles, on a comme valeur approchée de la première racine

$$x'_1 = 0,35 + 0,01 \frac{0,01907...}{0,02575...} = 0,357405...$$

La méthode de Newton appliquée au même nombre, 0,35, donne

$$x''_1 = 0,35 + \frac{0,01907...}{2,56668...} = 0,357429...;$$

la racine est comprise entre les deux nombres précédents et on peut la prendre égale à 0,35742 à 0,00001 près.

Pour l'autre racine, on trouve

$$f(2,15) = -0,01608..., \qquad f(2,16) = +0,03112...;$$

les mêmes méthodes appliquées au nombre 2,16 donnent comme valeurs approchées de la deuxième racine :

$$x_2' = 2,153407.... \quad \text{et} \quad x_2'' = 2,15338...,$$

et l'on peut prendre comme valeur approchée de cette racine 2,15337 à 0,00005 près.

On pourrait déterminer graphiquement des valeurs approchées des racines en cherchant les abscisses des points d'intersection de la ligne $y = e^x$ et de la droite $y = 4x$.

3° L'équation peut s'écrire

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - x = \coth x - x = 0;$$

on premier membre est discontinu pour $x = 0$, mais il change simplement de signe quand on change x en $-x$, de sorte que les racines, si elles existent, sont deux à deux égales et opposées, et il suffit de supposer x positif. La dérivée,

$$f'(x) = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2} - 1 = -\left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} + 1\right),$$

est toujours négative, la fonction décroît constamment et s'annule une seule fois entre 0 et $+\infty$.

On calcule les valeurs de $f(x)$ soit au moyen des tables de fonctions hyperboliques soit au moyen de $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} - x$; on trouve

$$f(1,19) = +0,01397..., \qquad f(1,20) = -0,00046...$$

En partant du nombre 1,20 qui est le plus rapproché de la racine, la méthode des parties proportionnelles donne $x_1' = 1,19968...$ et celle de Newton donne 1,19895... ; on prendra comme valeur approchée la demi-somme 1,1993, l'erreur étant inférieure à 0,0004.

4° La pression moyenne p_m fournie par un diagramme de machine à vapeur est, dans des conditions simples, liée à la pression d'admission p_a, à la pression d'échappement p_e et au degré de détente d par l'équation

$$p_m = p_a \frac{1 + \log d}{d} - p_e.$$

En supposant $p_a = 1{,}8(p_m + p_e)$ et prenant d comme inconnue x, on arrive à l'équation

$$f(x) = x - 1{,}8\,(1 + \log x) = 0.$$

La dérivée $f'(x)$ s'annule pour $x = 1{,}8$ et cette valeur rend la fonction négative ; l'équation a donc une racine inférieure à $1{,}8$ et une racine supérieure à ce nombre. En substituant des nombres successifs et se servant des tables de logarithmes népériens, on trouve

$$f(0{,}48) = +0{,}0012\ldots, \qquad f(0{,}49) = -0{,}0262\ldots,$$
$$f(4{,}5) = -0{,}0073\ldots, \qquad f(4{,}6) = +0{,}0511\ldots;$$

l'équation a donc une racine comprise entre $0{,}48$ et $0{,}49$ et une autre comprise entre $4{,}5$ et $4{,}6$, la dernière convient seule au problème proposé.

5° Pour résoudre l'équation

$$f(x) = (1{,}0077)^x - 9{,}12\,x - 12000 = 0,$$

nous calculerons le premier terme au moyen de son logarithme $0{,}0033313\,x$; les résultats de substitution des nombres 1310 et 1320 dans le premier membre de l'équation sont égaux à -825 et $+826$ à 5 unités près ; on peut donc prendre $x = 1315$ à une unité près.

6° La surface d'un segment compris dans un cercle de rayon R entre un arc égal à θ et sa corde a pour valeur

$$\frac{R^2\theta}{2} - R^2 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2};$$

en écrivant qu'elle est égale au quart du cercle et posant $\theta = x + \frac{\pi}{2}$, on a l'équation $f(x) = x - \cos x = 0$.

La dérivée $f'(x)$ a un signe constant et l'équation n'a qu'une racine réelle ; en utilisant les tables donnant les valeurs des arcs dans le cercle de rayon 1 et celles des lignes trigonométriques, on trouve $x = 42°20'48''$ à une demi-seconde près par excès.

7° En construisant les lignes d'équations $y = \frac{x}{2}$ et $y = \sin x$, on constate qu'elles ne se coupent qu'en deux points, symétriques par rapport à l'origine ; l'équation $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x = 0$ n'a que deux racines réelles égales et de signes contraires, et la racine positive est

comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$. En utilisant les tables trigonométriques, on trouve $x = 108°36'14''$ à une demi-seconde près.

8° La fonction $f(x) = \text{arc tg } x - \frac{2}{x}$ est toujours croissante ; si nous ne considérons que les valeurs de l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, l'équation $f(x) = 0$ a une seule racine positive et une racine négative égale à la précédente en valeur absolue. Pour utiliser les tables, il est préférable de chercher l'arc α dont la tangente est x ; il satisfait à l'équation $\alpha - 2 \cot g\, \alpha = 0$; les tables donnent $\alpha = 61°42'1''$ à une demi-seconde près, sa valeur en radian étant 1,07687... ; on en déduit $x = \text{tg}\, \alpha = 1{,}85639$ à une demi-unité près de l'ordre du dernier chiffre.

---

137. — *Étant donnée l'équation d'une chaînette*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

déterminer la valeur de a de façon que cette courbe passe par un point donné de coordonnées x_0 et y_0, et discuter l'équation obtenue ; calculer numériquement la valeur limite que peut prendre le rapport $\frac{y_0}{x_0}$ pour que le problème soit possible.

En exprimant que la chaînette passe par un point de coordonnées (x_0, y_0), on voit que le rapport $\frac{x_0}{a} = z$ doit satisfaire à l'équation

$$\frac{y_0}{x_0} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \text{ch}\, z ;$$

nous désignerons par m le rapport $\frac{y_0}{x_0}$, et nous pourrons supposer m positif.

La fonction $f(z) = \text{ch}\, z - mz$ a pour dérivée

$$f'(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} - m = \text{sh}\, z - m ;$$

cette dérivée s'annule lorsque l'on a $e^z = m + \sqrt{m^2+1}$; si nous posons $z_1 = \log(m + \sqrt{m^2+1})$, la fonction $f(z)$ est décroissante pour z variant de 0 à z_1 et croissante de z_1 à $+\infty$. L'équation $f(z) = 0$ a par suite deux racines positives ou une racine double, ou aucune racine, suivant que $f(z_1)$ est négatif, nul ou positif. On a

$$f(z_1) = \operatorname{ch} z_1 - mz_1 = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 z_1} - mz_1$$
$$= m\left[\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} - \log\left(m + \sqrt{1+m^2}\right)\right];$$

le deuxième facteur dans le dernier membre, considéré comme fonction de m, a une dérivée négative et décroît constamment ; il s'annule pour une valeur que nous désignerons par m_1 ; dès lors, si $m < m_1$, $f(z_1)$ est positif, l'équation $f(z) = 0$ n'a pas de racine et le problème proposé n'a pas de solution ; si $m = m_1$, l'équation $f(z) = 0$ a une racine double ; enfin si $m > m_1$, cette équation a deux racines distinctes et le problème proposé a deux solutions.

La recherche de m_1 peut se faire directement, mais il est à remarquer qu'elle se ramène à la résolution de la troisième des équations du n° précédent ; en effet pour $m = m_1$, l'équation $f(z) = 0$ a une racine double, par suite les équations

$$\operatorname{ch} z - m_1 z = 0, \qquad \operatorname{sh} z - m_1 = 0$$

ont une racine commune, et cette racine satisfait dès lors à l'équation

$$\operatorname{ch} z - z \operatorname{sh} z = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} - z = 0.$$

Nous avons trouvé dans ce cas $z = 1{,}1993$ à $0{,}0004$ près ; il en résulte que l'on a

$$m_1 = \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 1{,}50819$$

à une unité près de l'ordre du dernier chiffre.

138. — *Écrire l'équation de la tangente en un point* M *de la courbe représentée par* $y^2 = x^3$; *cette tangente rencontre la courbe en un point* N *autre que le point de contact; déterminer les coordonnées du point* N *en fonction de celles du premier,* M.

Si l'on résout l'équation par rapport à y; on a

$$y = x^{\frac{3}{2}}, \qquad y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}},$$

et l'équation de la tangente (n° 248) est

$$Y - y = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} (X - x), \qquad Y = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} X - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}}.$$

Les abscisses des points communs à cette droite et la courbe sont fournies par l'équation

$$X^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} X - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}};$$

cette équation, rendue entière par élévation au carré, a une racine double égale à x et une autre égale à $\frac{x}{4}$; les coordonnées du point N sont par suite

$$x_1 = \frac{x}{4}, \qquad y_1 = \frac{y}{8}.$$

On peut aussi conserver l'équation sous la forme

$$f(x, y) = y^2 - x^3 = 0, \quad \text{d'où} \quad f(x_1, y_1, z) = y_1^2 z - x_1^3$$

et appliquer les considérations du n° 249; l'équation de la tangente est

$$-(X - x)\,3x^2 + (Y - y)\,2y = 0;$$

les solutions communes à cette équation et à $Y^2 - X^3 = 0$, autres que x, y, ont les valeurs x_1, y_1 déjà déterminées.

139. — *Déterminer l'équation d'une tangente à une ellipse rapportée à ses axes, connaissant le coefficient angulaire m de cette tangente; montrer qu'elle est de la forme*

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2};$$

déduire de là les coefficients angulaires des tangentes à l'ellipse passant par un point donné de coordonnées x_0, y_0, et trouver le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe deux tangentes rectangulaires. Même question pour l'hyperbole et pour la parabole.

Si l'on utilise le paramètre φ, l'équation de la tangente à l'ellipse est

$$\frac{X \cos\varphi}{a} + \frac{Y \sin\varphi}{b} - 1 = 0;$$

en écrivant qu'elle a pour coefficient angulaire m, on a

$$m = -\frac{b}{a}\operatorname{cotg}\varphi, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\cos\varphi}{am} = \frac{\sin\varphi}{-b} = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}};$$

il suffit de remplacer $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par leurs valeurs pour trouver l'équation de la tangente.

Si l'on avait utilisé l'équation $\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} - 1 = 0$ renfermant les coordonnées x, y du point de contact, on aurait eu de même

$$m = -\frac{b^2x}{a^2y}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\frac{x}{a}}{am} = \frac{\frac{y}{b}}{-b} = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}};$$

en remplaçant x, y par leurs valeurs dans l'équation de la tangente, on trouverait l'équation

$$Y = mX \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

qui ne diffère de celle de l'énoncé que par le changement de x,y en X,Y.

En écrivant que la tangente passe par un point de coordonnées x_0, y_0, on obtient la relation $y_0 - mx_0 = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$ qui, mise sous la forme entière, s'écrit

$$(x_0^2 - a^2)\,m^2 - 2x_0y_0m + (y_0^2 - b^2) = 0.$$

Cette équation du second degré donne les coefficients angulaires des tangentes issues du point x_0, y_0; on peut vérifier qu'elles sont

réelles si $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1 \geqslant 0$, c'est-à-dire si le point est extérieur à l'ellipse ou situé sur cette courbe.

Pour que les deux tangentes soient rectangulaires, il faut et il suffit que le produit des racines m soit égal à -1, ou que l'on ait

$$x_0^2+y_0^2=a^2+b^2;$$

cette équation est satisfaite par les coordonnées des points d'un cercle concentrique à l'ellipse, et ayant pour rayon $\sqrt{a^2+b^2}$; ce cercle est circonscrit au rectangle circonscrit à l'ellipse, il est le lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont tangents à l'ellipse, et il s'appelle le *cercle orthoptique* ou *cercle de Monge.*

On trouve des résultats analogues dans le cas de l'hyperbole; il suffit de changer b^2 en $-b^2$ dans le calcul précédent. Le cercle orthoptique a pour rayon $\sqrt{a^2-b^2}$, il n'est réel que si $a>b$, c'est-à-dire si l'angle des asymptotes qui renferme la courbe est obtus; dans le cas de l'hyperbole équilatère, le cercle orthoptique se réduit au centre de la courbe.

Si l'on considère une parabole d'équation $y^2-2px=0$ et si l'on utilise l'équation de la tangente

$$Yy-p(X+x)=0$$

renfermant les coordonnées du point de contact, on écrit

$$m=\frac{p}{y}, \quad \text{d'où} \quad y=\frac{p}{m} \quad \text{et} \quad x=\frac{y^2}{2p}=\frac{p}{2m};$$

on a ainsi les coordonnées du point de contact en fonction de m et en les portant dans l'équation de la tangente, elle devient

$$Y=mX+\frac{p}{2m}.$$

Pour que cette tangente passe par un point (x_0, y_0), il faut que m satisfasse à l'équation

$$y_0=mx_0+\frac{p}{2m}, \quad \text{d'où} \quad 2m^2x_0-2my_0+p=0.$$

Les racines de cette équation sont les coefficients angulaires des

deux tangentes à la parabole issues du point considéré. Pour qu'elles soient rectangulaires, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{p}{2x_0} = -1, \quad \text{d'où} \quad x_0 = -\frac{p}{2};$$

le point doit se trouver sur la directrice; cette droite est donc le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole.

---

140. — *En employant les mêmes notations que dans le problème précédent, montrer que l'équation*

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1\right)^2 = 0$$

représente l'ensemble des deux tangentes à l'ellipse issues du point (x_0, y_0); plus généralement, l'ensemble des tangentes issues de ce point à la courbe du second ordre dont l'équation est $f(x, y) = 0$ est représenté par

$$f(x, y) f(x_0, y_0) - \frac{1}{4}(x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z)^2 = 0.$$

Soient X, Y les coordonnées d'un point quelconque d'une tangente à l'ellipse passant par le point (x_0, y_0); nous avons vu dans l'exercice 34 que les coordonnées d'un autre point de la même tangente peuvent s'exprimer sous la forme

$$x = \frac{X + \lambda x_0}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{Y + \lambda y_0}{1 + \lambda}.$$

Écrivons que le point (x, y) est le point de contact de la tangente avec l'ellipse; il est situé à l'intersection de la courbe et de la polaire du point (x_0, y_0), de sorte que l'on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

En remplaçant x, y par leurs valeurs, on obtient les relations

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 + 2\lambda\left(\frac{Xx_0}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} - 1\right) + \lambda^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) = 0,$$

$$\frac{Xx_0}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} - 1 + \lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Lorsque le point (X, Y) varie sur l'une des tangentes, λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, et réciproquement; on aura donc le lieu du point, c'est-à-dire l'équation de l'ensemble des tangentes en éliminant λ entre les équations précédentes, ce qui donne

$$\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}-1\right)^2=0.$$

Le même raisonnement peut être employé dans le cas général d'une conique représentée par l'équation $f(x, y)=0$; il suffit d'exprimer que x et y satisfont aux équations de la courbe et de la polaire

$$f(x, y)=0 \quad \text{et} \quad x_0 f'_x+y_0 f'_y+f'_z=0,$$

ce qui donne

$$f(X, Y)+\lambda(x_0 f'_X+y_0 f'_Y+f'_Z)+\lambda^2 f(x_0, y_0)=0,$$
$$x_0 f'_X+y_0 f'_Y+f'_Z+2\lambda f(x_0, y_0)=0.$$

En éliminant λ, on arrive à l'équation

$$4 f(X, Y) f(x_0, y_0)-(x_0 f'_X+y_0 f'_Y+f'_Z)^2=0;$$

il faut remplacer Z par 1 dans le calcul effectué. Les équations obtenues ne diffèrent de celles de l'énoncé que par le changement de x, y, z en X, Y, Z.

---

141. — *Former la condition pour que deux courbes passant par un point de coordonnées x, y soient en ce point orthogonales, c'est-à-dire aient leurs tangentes rectangulaires.*

Si les équations des courbes sont résolues par rapport à y sous la forme $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, la condition cherchée est

$$f'_x\varphi'_x+1=0.$$

Si les équations des courbes sont données au contraire sous la forme $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$, la condition d'orthogonalité est

$$f'_x\varphi'_x+f'_y\varphi'_y=0.$$

---

142. — *L'équation*

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}-1=0$$

représente, lorsque λ *varie, une famille de coniques ayant mêmes directions d'axes et mêmes foyers; on dit qu'elles sont homofocales; par un point* (x_0, y_0) *du plan passent deux de ces coniques, et les valeurs correspondantes de* λ *sont les racines de l'équation obtenue en remplaçant* x *et* y *par* x_0 *et* y_0; *démontrer que cette équation a ses racines réelles, que les coniques correspondantes sont l'une une ellipse et l'autre une hyperbole, et que ces courbes se coupent orthogonalement.*

Les valeurs de λ correspondant aux coniques qui passent par un point $(x_0; y_0)$ sont les racines de l'équation

$$F(\lambda)=\frac{x_0^2}{a^2-\lambda}+\frac{y_0^2}{b^2-\lambda}-1=0.$$

En supposant $a^2>b^2$ et substituant à λ dans le premier membre des nombres successifs, on obtient des résultats dont le signe est donné par le tableau suivant :

$-\infty$	$b^2-\varepsilon$	$b^2+\varepsilon$	$a^2-\varepsilon$	$a^2+\varepsilon$	$+\infty$;
$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$

il existe donc une racine λ' inférieure à b^2, à laquelle correspond une ellipse, et une racine λ'' comprise entre b^2 et a^2, à laquelle correspond une hyperbole.

La condition d'orthogonalité au point (x_0, y_0) commun aux deux courbes obtenues en donnant à λ les valeurs λ' et λ'', telle qu'elle résulte de l'exercice précédent, est

$$\Phi=\frac{x_0^2}{(a^2-\lambda')(a^2-\lambda'')}+\frac{y_0^2}{(b^2-\lambda')(b^2-\lambda'')}=0.$$

Elle est satisfaite, car on a identiquement

$$F(\lambda')-F(\lambda'')=(\lambda'-\lambda'')\Phi;$$

comme le premier membre est nul et que $\lambda'-\lambda''$ ne l'est pas, on a bien $\Phi=0$.

Si l'on remarque que le produit $F(\lambda)(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)$ est un

trinome dont les racines sont λ' et λ'', et peut être écrit sous la forme $-(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda'')$, on a identiquement

$$F(\lambda)(a^2-\lambda)=x_0^2+\left(\frac{y_0^2}{b^2-\lambda}-1\right)(a^2-\lambda)=-\frac{(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda'')}{b^2-\lambda};$$

en faisant $\lambda=a^2$, on trouve la valeur de x_0^2; on trouverait de même y_0^2 et l'on a de cette façon

$$x_0^2=+\frac{(a^2-\lambda')(a^2-\lambda'')}{a^2-b^2}, \qquad y_0^2=-\frac{(b^2-\lambda')(b^2-\lambda'')}{a^2-b^2};$$

on voit ainsi que x_0^2 et y_0^2 s'expriment d'une manière rationnelle entière au moyen de λ' et λ''; les deux nombres λ' et λ'' sont appelés les coordonnées elliptiques du point (x_0, y_0) et plus généralement des points $(\pm x_0, \pm y_0)$.

---

143. — *Même question en considérant l'équation*

$$\frac{y^2}{p-\lambda}-2x+\lambda=0,$$

qui représente des paraboles homofocales.

En substituant dans le premier membre de l'équation

$$F(\lambda)=\frac{y_0^2}{p-\lambda}-2x_0+\lambda=0$$

les nombres $-\infty$, $p-\varepsilon$, $p+\varepsilon$, $+\infty$, on voit qu'elle a une racine λ' inférieure à p et une racine λ'' supérieure à p; il leur correspond deux paraboles ayant pour axe Ox, pour foyer le point d'abscisse $\frac{p}{2}$, et tournées en sens inverse l'une de l'autre.

La condition d'orthogonalité est

$$\Phi=1+\frac{y_0^2}{(p-\lambda')(p-\lambda'')}=0,$$

et l'on vérifie qu'elle est satisfaite en utilisant l'identité

$$F(\lambda')-F(\lambda'')=(\lambda'-\lambda'')\Phi.$$

Les expressions des coordonnées x_0, y_0 du point en fonction de λ' et λ'' résultent des formules

$$y_0^2=-(p-\lambda')(p-\lambda''), \qquad 2x_0=\lambda'+\lambda''-p.$$

---

144. — *Former l'équation de la normale en un point de la parabole* $y^2 - 2px = 0$; *former l'équation de cette normale connaissant son coefficient angulaire; on obtient ainsi*

$$Y = m(X - p) - \frac{pm^3}{2};$$

déduire de là les coefficients angulaires des normales issues d'un point (x_0, y_0) *à la parabole; discuter la réalité de ces normales.*

La normale à la parabole est représentée par l'équation (n° 251)

$$\frac{Y - y}{y} = \frac{X - x}{-p}.$$

En écrivant que son coefficient angulaire est égal à m, on a

$$-\frac{y}{p} = m, \qquad y = -pm, \qquad x = \frac{y^2}{2p} = \frac{pm^2}{2}$$

et en transportant dans l'équation de la normale, elle devient

$$Y = m(X - p) - \frac{pm^3}{2}.$$

Les coefficients angulaires des normales passant par un point (x_0, y_0) sont les racines de l'équation du troisième degré

$$F(m) = m^3 - \frac{2(x_0 - p)}{p} m + \frac{2y_0}{p} = 0.$$

La réalité des racines de cette équation (n° 227) dépend du signe de la quantité analogue à $4p^3 + 27q^2$, qui est ici

$$\Phi = \frac{108}{p^2}\left[y_0^2 - \frac{8}{27}(x_0 - p)^3\right].$$

Nous retrouverons plus loin (exercice 171) la courbe représentée par l'équation $\Phi = 0$; c'est la développée de la parabole. Si le point (x_0, y_0) est sur cette courbe, l'équation a une racine double et on peut mener à la parabole trois normales réelles dont deux confondues; si le point (x_0, y_0) est par rapport à la courbe dans la région du plan qui comprend l'origine, Φ est positif et l'on ne peut mener qu'une normale à la parabole; si le point est dans l'autre région du plan, Φ est négatif et l'on peut mener à la courbe trois normales réelles distinctes.

145. — *Démontrer que les pieds des normales issues d'un point donné* (x_0, y_0) *à l'ellipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ *sont les points communs à cette courbe et à l'hyperbole*

$$(a^2-b^2)xy+b^2y_0x-a^2x_0y=0,$$

que l'on appelle hyperbole d'Apollonius ; construire cette courbe.

Former les équations des hyperboles analogues lorsqu'on remplace l'ellipse donnée par une hyperbole ou une parabole, et construire ces hyperboles.

Nous avons vu (n° 251) que l'équation de la normale en un point (x, y) d'une ellipse est

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}};$$

en écrivant qu'elle passe par un point (x_0, y_0), nous obtenons entre x, y une relation qui s'écrit

$$a^2y(x_0-x)-b^2x(y_0-y)=0 \qquad \text{ou} \qquad c^2xy+b^2y_0x-a^2x_0y=0.$$

En considérant x et y comme coordonnées courantes, elle représente une hyperbole équilatère (fig. 27), qui passe par l'origine et par le point (x_0, y_0) ; elle a pour asymptotes des parallèles aux axes, d'équations $x=\frac{a^2x_0}{c^2}$, $y=-\frac{b^2y_0}{c^2}$.

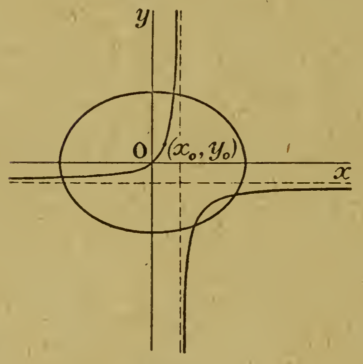


Fig. 27.

Les points de rencontre de cette hyperbole avec l'ellipse sont les pieds des normales à cette courbe issues du point (x_0, y_0) ; il y a quatre normales dont deux sont toujours réelles, les deux autres pouvant être réelles et distinctes, ou confondues, ou imaginaires suivant que la branche d'hyperbole qui ne passe pas par l'origine coupe l'ellipse, ou lui est tangente, ou ne la coupe pas.

Si l'on change b^2 en $-b^2$, on obtient l'équation de l'hyperbole d'Apollonius relative à une hyperbole,

$$c^2xy-b^2y_0x-a^2x_0y=0;$$

elle passe encore par l'origine et par le point (x_0, y_0) et a pour asymptotes les droites d'équation $x = \frac{a^2x_0}{c^2}$, $y = \frac{b^2y_0}{c^2}$. Sa construction est analogue à celle de l'hyperbole d'Apollonius relative à l'ellipse.

Dans le cas de la parabole, l'équation de l'hyperbole d'Apollonius est

$$y(x_0 - x) + p(y_0 - y) = 0 \quad \text{ou} \quad xy - (x_0 - p)y - py_0 = 0;$$

elle passe par le point (x_0, y_0) et a pour asymptotes l'axe des x et la droite d'équation $x = x_0 - p$; cette hyperbole (fig. 28) rencontre la parabole en trois points dont un est toujours réel.

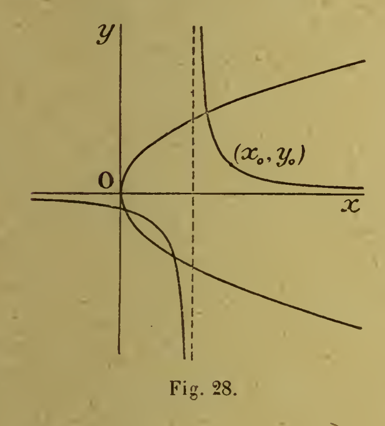


Fig. 28.

On peut calculer les coordonnées des pieds des normales issues du point (x_0, y_0) à la parabole, en résolvant le système des équations de cette courbe et de l'hyperbole d'Apollonius; en remplaçant dans la dernière x par $\frac{y^2}{2p}$, on obtient ainsi l'équation du troisième degré

$$\frac{y^3}{2p} - (x_0 - p)y - py_0 = 0$$

fournissant les ordonnées des pieds des trois normales; la discussion de la réalité des racines de cette équation est identique à celle des racines de l'équation en m de l'exercice précédent; on passerait du reste de l'une à l'autre en posant $y = -pm$.

---

146. — *Montrer que la courbe représentée par l'équation*

$$x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$$

a trois points doubles, deux sur Ox *et un sur* Oy; *déterminer les tangentes en ces points.*

Le premier membre $f(x, y)$ de l'équation et ses dérivées partielles

$$f'_x = 4(x^3 - a^2x), \qquad f'_y = -6a(y^2 + ay)$$

s'annulent simultanément pour les trois systèmes de valeurs

(A) $y = 0,\ x = a$, (B) $y = 0,\ x = -a$, (C) $x = 0,\ y = -a$,

qui sont les coordonnées de trois points singuliers A, B, C.

En formant les dérivées secondes,

$$f''_{x^2} = 4(3x^2 - a^2), \qquad f''_{xy} = 0, \qquad f''_{y^2} = -6a(2y + a),$$

et en y remplaçant x et y par les coordonnées des points singuliers (n° 252), on trouve que les coefficients angulaires des tangentes aux points A et B sont donnés par

$$8a^2 - 6a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}},$$

et au point C ils sont donnés par

$$-4a^2 + 6a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Il est facile de construire la courbe en résolvant l'équation par rapport à x^2:

$$x^2 = a^2 \pm y\sqrt{2ay + 3a^2};$$

elle a la forme de la figure 29 et elle coupe l'axe Oy, en dehors du point C, en un point D d'ordonnée $\frac{a}{2}$; les points de contact des tangentes parallèles aux axes ont des coordonnées annulant f'_x et f'_y, et on les obtient sans difficulté.

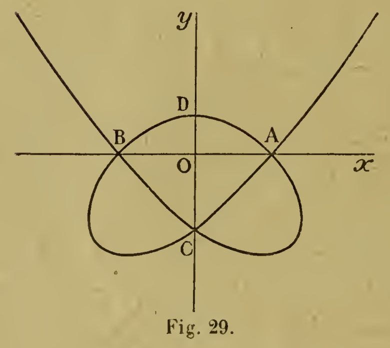


Fig. 29.

---

147. — *Construire les courbes représentées par les équations suivantes et déterminer leurs points d'inflexion :*

1° $y = x^3$, 2° $y = x^2 - x^4$, 3° $y^2 = x^3 + 1$,

4° $y^2 = x^3 - x^4$, 5° $y^3 = x^3 - x$, 6° $y^2 = \frac{x}{(x-1)^2}$.

1° La courbe d'équation $y = x^3$ a un point d'inflexion à l'origine, car $y'' = 6x$ s'annule pour $x = 0$ en changeant de signe (fig. 30).

2° Pour la courbe d'équation $y = x^2 - x^4$, on a

$$y' = 2x - 4x^3, \qquad y'' = 2 - 12x^2;$$

y passe par un minimum égal à zéro pour $x = 0$ et par un maximum égal à $\frac{1}{4}$ pour $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$; il y a deux points d'inflexion de coordonnées $x = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$, $y = \frac{5}{36}$ (fig. 31).

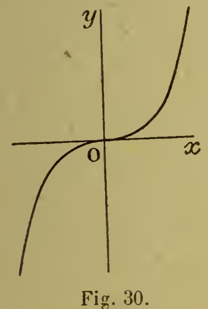


Fig. 30.

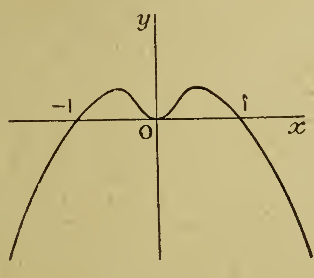


Fig. 31.

3° En résolvant l'équation par rapport à y, on a

$$y = (x^3+1)^{\frac{1}{2}}, \quad y' = \frac{3}{2}x^2(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}, \quad y'' = \frac{3}{4}(x^4+4x)(x^3+1)^{-\frac{3}{2}};$$

la fonction y n'est réelle que si $x > -1$; elle croît en valeur absolue quand x augmente; y'' ne s'annule dans l'intervalle de réalité que pour $x = 0$, en passant du négatif au positif; il y a donc des points d'inflexion de coordonnées $x = 0$, $y = \pm 1$, où la tangente est parallèle à Ox (fig. 32).

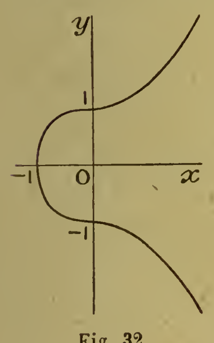


Fig. 32.

4° On peut résoudre par rapport à y, ou bien encore utiliser l'équation donnée, qui donne

$$y^2 = x^3 - x^4, \qquad 2yy' = 3x^2 - 4x^3,$$
$$2yy'' + 2y'^2 = 6x - 12x^2,$$
$$yy'' = 3x - 6x^2 - y'^2 = \frac{x(8x^2 - 12x + 3)}{4(1-x)}.$$

La courbe est symétrique par rapport à Ox et l'on peut se limiter

à l'étude des valeurs positives de y ; elles ne sont réelles que si x est compris entre 0 et 1 ; dans cet intervalle, la dérivée seconde ne s'annule que pour une seule valeur $x = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$ en passant du positif au négatif; à cette valeur correspondent deux points d'inflexion. La courbe a l'aspect de la figure 33 ; l'origine est un point de rebroussement avec une tangente dirigée suivant Ox; la valeur absolue de l'ordonnée a un maximum pour $x = \frac{3}{4}$ et cette valeur est $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

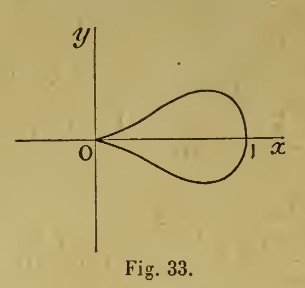


Fig. 33.

5° En opérant de même, on a

$$y^3 = x^3 - x, \quad 3y^2y' = 3x^2 - 1, \quad 6yy'^2 + 3y^2y'' = 6x,$$

$$y^2y'' = 2x - 2yy'^2 = -\frac{6x^2+2}{9(x^3-x)}.$$

La dérivée seconde change de signe pour les valeurs $x = 0$ et $x = \pm 1$ qui annulent y et rendent y' infini ; à ces valeurs correspondent des points d'inflexion. L'ordonnée passe par un maximum ou un minimum pour $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ et est égale à $\mp\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{3}$. La courbe a la forme de la figure 34 ; elle est symétrique par rapport à l'origine, car l'équation ne change pas quand on remplace x et y par $-x$ et $-y$; elle a pour asymptote la bissectrice de l'angle xOy, car la différence

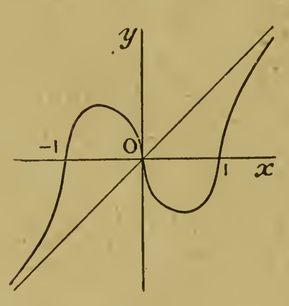


Fig. 34.

$$y - x = \frac{y^3 - x^3}{y^2 + xy + x^2} = \frac{-x}{y^2 + xy + x^2}$$

a pour limite 0 pour x infini.

6° La même méthode donne

$$y^2 = x(x-1)^{-2}, \qquad 2yy' = -(x+1)(x-1)^{-3},$$
$$2y'^2 + 2yy'' = (2x+4)(x-1)^{-4},$$
$$yy'' = (x+2)(x-1)^{-4} - y'^2 = \frac{3x^2+6x-1}{4x(x-1)^4}.$$

L'ordonnée y n'est réelle que si x est positif; elle devient infinie pour $x=1$. La dérivée y' change de signe pour $x=1$; la dérivée y'' s'annule pour une seule racine positive

$$x = \frac{-3+2\sqrt{3}}{3},$$

en passant du négatif au positif si y est positif; à cette valeur correspond un point d'inflexion. La courbe passe à l'origine où la tangente est l'axe Oy ; elle a pour asymptotes l'axe Ox et la droite $x=1$ (fig. 35).

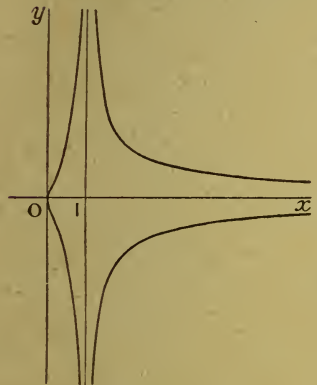


Fig. 35.

---

148. — *Construire les courbes représentées par les équations suivantes et déterminer leurs asymptotes :*

1° $y = \frac{x^3+x}{x^2-1}$, 2° $y = x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$, 3° $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} - 1 = 0$,

4° $y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0$, 5° $2x^3 - y^3 + (y-x)^2 = 0$,

6° $xy + y^2 + x - 4 = 0$, 7° $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$,

8° $xy(x+y) - (x-y)^2 = 0$, 9° $y^3 - x^3 + x^2 = 0$,

10° $\begin{cases} x = \frac{t(t+2)}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{t+1}, \end{cases}$ 11° $\begin{cases} x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \\ y = \frac{at(1-t^2)}{1+t^2}, \end{cases}$ 12° $\begin{cases} x = \frac{t^3}{1-t^2}, \\ y = \frac{1+t^2}{1-t^2}. \end{cases}$

13° $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, 14° $y = a \cos 2\pi\left(\frac{x}{T} + \lambda\right)$,

15° $y = ae^{-x} \sin mx$,

16° $y = \frac{\sin x}{x}$, 17° $y = x \log x$, 18° $y = e^{\frac{1}{x}}$,

19° $\rho = \cos \frac{\theta}{2}$, 20° $\rho = \sin \theta + \cos \theta$, 21° $\rho = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$,

22° $\rho = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta}$, 23° $\rho = \frac{1}{2 + \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta}$.

1° La fonction $y = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$ est toujours réelle ; elle est discontinue pour les valeurs $x = \pm 1$ auxquelles correspondent des asymptotes parallèles à Oy. En divisant le numérateur par le dénominateur, on a $y = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$, de sorte que la droite $y = x$ est asymptote. La courbe est symétrique par rapport à l'origine ; elle passe en ce point et y a pour tangente la droite $y = -x$, comme on le voit en rendant l'équation entière et annulant les termes de plus bas degré.

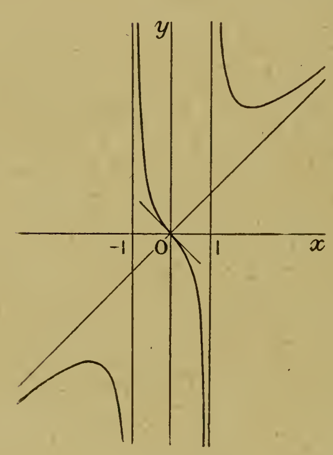


Fig. 36.

La dérivée, $y' = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$, s'annule pour les valeurs de x et de y

$x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{5}}$, $y = \pm \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\sqrt{2 + \sqrt{5}}$; la dérivée seconde ne change de signe que pour $x = 0$, de sorte que l'origine est un point d'inflexion (fig. 36).

2° La courbe représentée par $y = x\sqrt{\frac{x - 1}{x - 2}}$ est construite au n° 261 ; en rendant l'équation rationnelle entière, on l'écrit sous la forme

$$x(y^2 - x^2) + x^2 - 2y^2 = 0 ;$$

on obtient de cette façon d'abord les tangentes à l'origine, d'équa-

tions $y = \pm \frac{x\sqrt{2}}{2}$, puis les directions asymptotiques données par $x(y^2 - x^2) = 0$; à $x = 0$ correspond la direction Oy et l'asymptote $x = 2$; à $y = x$ correspond la direction $c = +1$ et à $y = -x$ la direction $c = -1$; la formule (6) du n° 264 donne les ordonnées à l'origine

$$d = -\frac{\varphi_{m-1}(1,c)}{\varphi'_m(1,c)} = -\frac{1-2c^2}{2c};$$

pour $c = 1$, on a $d = \frac{1}{2}$ et pour $c = -1$, on a $d = -\frac{1}{2}$.

La courbe est unicursale, et, en posant $y = tx$, on trouve les expressions de x et y en fonction de t:

$$x = \frac{2t^2 - 1}{t^2 - 1}, \qquad y = \frac{t(2t^2 - 1)}{t^2 - 1}.$$

Les procédés du n° 266 permettraient de retrouver tous les résultats précédemment obtenus.

3° L'équation rendue entière s'écrit

$$x^2y^2 - b^2x^2 - a^2y^2 = 0;$$

l'origine est un point double isolé; les asymptotes sont parallèles aux axes et ont pour équations $x = \pm a$, $y = \pm b$; en résolvant par rapport à y^2 sous la forme

$$y^2 = \frac{b^2x^2}{x^2 - a^2} = b^2 + \frac{a^2b^2}{x^2 - a^2},$$

on voit qu'en valeur absolue x doit être supérieur à a et y supérieur à b. La courbe a la forme de la figure 37; elle est le lieu des sommets des rectangles OTMT′ dont la diagonale TT′ est tangente à l'ellipse de demi-axes a et b.

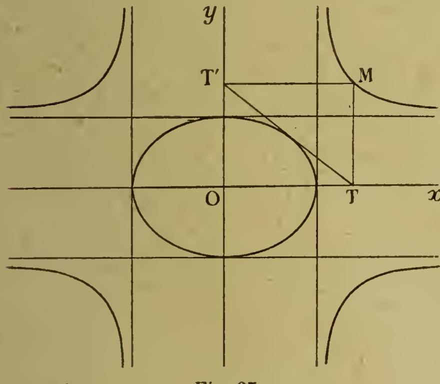


Fig. 37.

4° La courbe d'équation $y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0$ a à l'origine un point triple dont les tangentes sont deux confondues avec Oy et la troisième dirigée suivant Ox. Les directions asymptotiques sont données par $y^4 - x^4 = 0$; deux sont

réelles et ont pour coefficients angulaires $c=1$ et $c=-1$; la formule (6) du nº 264 donne

$$d=-\frac{a}{2c^2}=-\frac{a}{2}.$$

La courbe, qui est du quatrième ordre, est coupée par chacune de ses asymptotes en quatre points dont deux sont à l'infini et deux à distance finie; l'asymptote $y=x-\frac{a}{2}$ coupe la courbe en des points dont les abscisses sont les racines de l'équation

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^4-x^4+2ax^2\left(x-\frac{a}{2}\right)=0,$$

qui a deux racines infinies et deux racines finies $x=\frac{a(2\pm\sqrt{2})}{4}$.

La courbe est symétrique par rapport à Oy et l'on peut achever sa construction en résolvant l'équation par rapport à x^2 sous la forme

$$x^2=ay+\sqrt{y^2(a^2+y^2)};$$

pour y positif, on a $x^2=y(a+\sqrt{a^2+y^2})$ et le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers zéro avec y; pour y négatif, il faut au contraire prendre

$$x^2=-y(\sqrt{a^2+y^2}-a);$$

cette fois, c'est le rapport

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{\sqrt{a^2+y^2}-a}{-y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2+y^2}+a}$$

qui tend vers zéro avec y, de sorte que les branches de la courbe tournées du côté des y négatifs sont tangentes à l'origine à l'axe Oy.

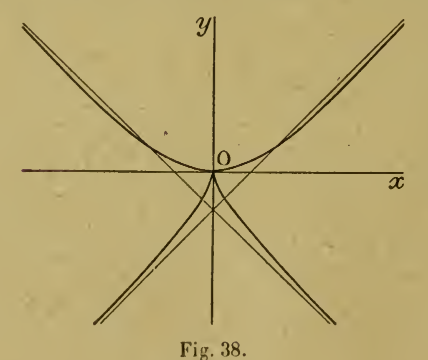


Fig. 38.

La courbe a la forme de la figure 38; elle est unicursale et, en posant $y=tx$, on a

$$x=\frac{2at}{1-t^4},\qquad y=\frac{2at^2}{1-t^4}.$$

5° La courbe d'équation

$$2x^3-y^3+(y-x)^2=0$$

a à l'origine un point de rebroussement dont la tangente est la bis-

sectrice de l'angle xOy. Elle a une asymptote de coefficient angulaire $c = \sqrt[3]{2}$ et dont l'ordonnée à l'origine est

$$d = \frac{(c-1)^2}{3c^2} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2;$$

elle coupe les axes en dehors du point O aux points $x = 0$, $y = 1$ et $y = 0$, $x = -\frac{1}{2}$; elle a la forme de la figure 39.

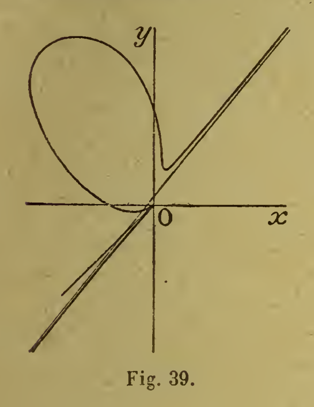


Fig. 39.

Si l'on veut trouver les points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe Ox, il faut joindre à l'équation donnée l'équation

$$f'_x = 6x^2 - 2(y - x) = 0;$$

les points de contact sont donc à l'intersection de la courbe avec la parabole d'équation $y = x + 3x^2$ et les abscisses de ces points sont les racines de l'équation $x^3 + x = \frac{1}{27}$, qui a trois racines réelles dont l'une est positive et très petite, et les deux autres négatives.

De la même manière, si l'on veut trouver les points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe Oy, il faut joindre à l'équation donnée l'équation

$$f'_y = -3y^2 + 2(y - x) = 0.$$

Les points de contact sont à l'intersection de la courbe avec la parabole d'équation $x = -\frac{3}{2}y^2 + y$; leurs ordonnées sont les racines de l'équation $y(y-1)^2 = \frac{4}{27}$. Cette équation a une racine simple $y = \frac{4}{3}$ à laquelle correspond le point de coordonnées $x = -\frac{4}{3}$, $y = \frac{4}{3}$; elle a une autre racine double $y = \frac{1}{3}$, à laquelle correspond le point de coordonnées $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{3}$, et ce point est un point d'inflexion.

6° La courbe d'équation

$$xy + y^2 + x - 4 = 0$$

est une hyperbole dont les asymptotes ont pour directions les droites $y = 0$, axe des x et $y + x = 0$, bissectrice de l'angle $x'Oy$; le centre C est déterminé par les équations

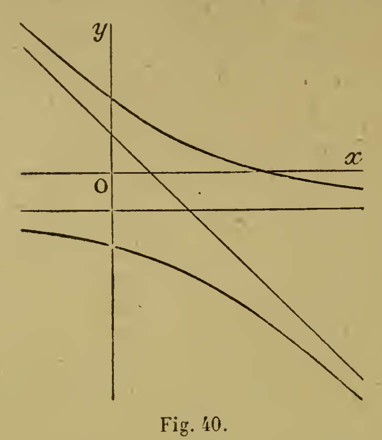


Fig. 40.

$$f'_x = y + 1 = 0$$

et

$$f'_y = x + 2y = 0,$$

et il a pour coordonnées

$$y = -1, \quad x = 2;$$

on obtient les asymptotes en traçant par ce point C des parallèles aux directions trouvées.

On peut résoudre l'équation par rapport à x, mais il suffit de déterminer les points de rencontre de la courbe avec les axes : $y = 0$, $x = 4$ et $x = 0$, $y = \pm 2$ pour achever la construction (fig. 40).

7° La courbe est construite aux n°s 272 et 277.

8° La courbe d'équation

$$xy(x + y) - (x - y)^2 = 0$$

est symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle xOy, car l'équation ne change pas quand on change x en y et y en x; l'origine est un point de rebroussement, avec la tangente dirigée suivant la bissectrice $y = x$. Les directions asymptotiques sont $x = 0$, $y = 0$ et $x + y = 0$; les asymptotes parallèles aux axes ont pour équations (n° 263) $y = 1$ et $x = 1$; la troisième asymptote est déterminée d'après la méthode du n° 264; on peut aussi pour cette dernière chercher quelle valeur il faut donner à h pour que la droite d'équation $y + x = h$ coupe la courbe en deux points à l'infini; l'équation aux abscisses des points de rencontre

$$x(-x + h)\,h - (h - 2x)^2 = 0$$

doit alors se réduire à un degré inférieur au second, et en annulant le

coefficient du terme du second degré, on trouve ainsi $h = -4$; mais alors l'équation a toutes ses racines infinies et l'on voit que la troisième asymptote ne coupe plus la courbe. Les premières la coupent aux points

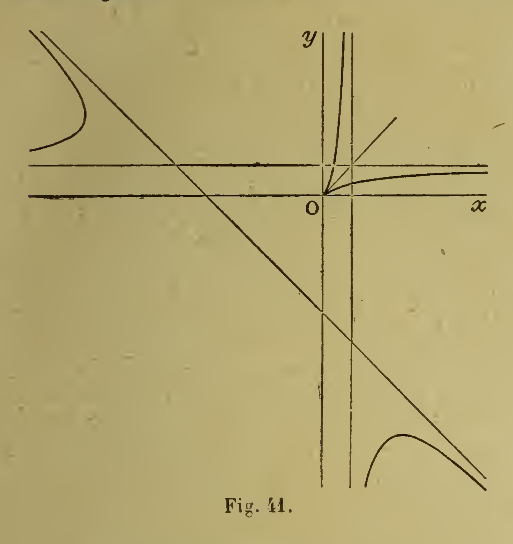


Fig. 41.

$$x = 1, \quad y = \frac{1}{3}$$

et

$$x = \frac{1}{3}, \quad y = 1.$$

On peut encore trouver les maxima et minima de x ou y en discutant la réalité des racines de l'équation résolue par rapport à x ou à y; la courbe a la forme de la figure 41.

9° La courbe d'équation $y^3 - x^3 + x^2 = 0$ a à l'origine un point de rebroussement avec tangente dirigée suivant Oy; elle a une asymptote de coefficient angulaire $c = 1$ et dont l'ordonnée à l'origine a pour valeur $d = -\frac{1}{3c^2} = -\frac{1}{3}$; la courbe est coupée par l'axe Ox à l'origine et au point d'abscisse 1; elle est coupée par l'asymptote $y = x - \frac{1}{3}$ au point d'abscisse $\frac{1}{9}$.

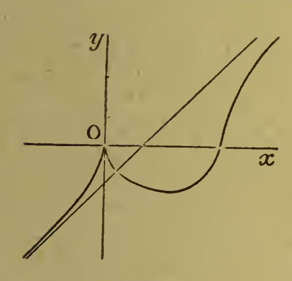


Fig. 42.

On peut étudier les dérivées de y comme à l'exercice 147; on a

$$y^3 = x^3 - x^2, \qquad 3y^2y' = 3x^2 - 2x, \qquad 6yy'^2 + 3y^2y'' = 6x - 2,$$

$$y^2y'' = 2x - \frac{2}{3} - 2yy'^2 = \frac{-2}{9(x-1)}.$$

y' s'annule, en dehors de l'origine qui est un point singulier, pour $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{-\sqrt[3]{4}}{3}$; la dérivée seconde change de signe en devenant

infinie pour $x = 1$, de sorte que le point de rencontre avec Ox, d'abscisse $x = 1$, est un point d'inflexion (fig. 42).

10° La courbe représentée par les équations

$$x = \frac{t(t+2)}{t^2 - 1}, \qquad y = \frac{t}{t+1}$$

est du second ordre, car les points où elle rencontre une droite d'équation $Ax + By + C = 0$ sont déterminés par une équation qui, rendue entière, est du second degré. Les coordonnées deviennent infinies : 1° pour $t = 1$, on a dans ce cas $x = \infty$, $y = \frac{1}{2}$; la courbe a alors une asymptote parallèle à Ox, d'ordonnée $\frac{1}{2}$; 2° pour $t = -1$, x et y deviennent alors infinis ; le coefficient angulaire de l'asymptote est $c = \lim \frac{y}{x} = \lim \frac{t-1}{t+2} = -2$; l'ordonnée à l'origine est

$$d = \lim (y - cx) = \lim (y + 2x) = \lim \frac{3t}{t-1} = \frac{3}{2}.$$

La courbe est donc une hyperbole dont les asymptotes sont les droites d'équations $y = \frac{1}{2}$ et $y = -2x + \frac{3}{2}$; le centre, point de rencontre des asymptotes, a pour coordonnées

$$x = y = \frac{1}{2}.$$

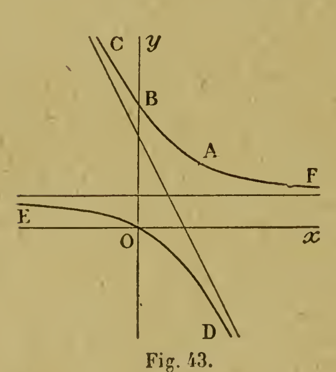


Fig. 43.

Pour $t = 0$, on a $x = y = 0$, la courbe passe donc à l'origine, ce qui permet d'achever sa construction, mais on peut étudier complètement la variation simultanée de x et y en fonction de t; la dérivée x'_t est constamment négative et y'_t constamment positive ; les variations du point de la courbe sont indiquées dans le tableau suivant, auquel correspond la figure 43.

t	$-\infty$	-2	$-1-\varepsilon$	$-1+\varepsilon$	0	$1-\varepsilon$	$1+\varepsilon$	$+\infty$
x	1	0	$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	1
y	1	2	$+\infty$	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Point	A	B	C	D	O	E	F	A

11° La courbe d'équations

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{at(1-t^2)}{1+t^2}$$

est du troisième ordre ; t représente le coefficient angulaire $\frac{y}{x}$ de la droite joignant l'origine à un point de la courbe.

L'origine est un point double, car x et y s'annulent pour $t = \pm 1$; les coefficients angulaires des tangentes sont les limites de $\frac{y}{x} = t$ et les tangentes sont les bissectrices des angles des axes. x n'est jamais infini tandis que y devient infini pour t infini ; x a alors pour limite $-a$ et la courbe a pour asymptote la droite $x = -a$.

En donnant à t des valeurs égales et opposées, x ne change pas, tandis que y change de signe ; la courbe est donc symétrique par rapport à Ox et il suffirait de faire varier t de 0 à $+\infty$. Les dérivées sont

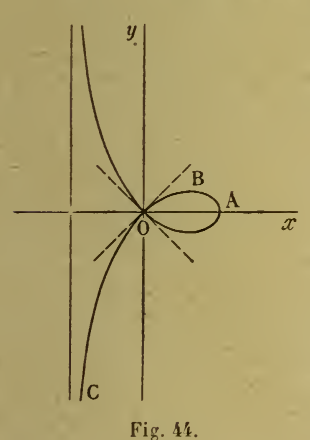


Fig. 44.

$$x'_t = \frac{-4at}{(1+t^2)^2}, \qquad y'_t = \frac{a(1-4t^2-t^4)}{(1+t^2)^2};$$

la première s'annule pour $t = 0$ et la seconde pour $t = \pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$. Pour $t = 0$, on a le point A d'abscisse a ; lorsque l'on fait varier t de 0 à 1, on obtient les points de l'arc ABO (fig. 44) ; ensuite pour t variant de 1 à $+\infty$, ceux de l'arc OC asymptote à la droite $x = -a$; en faisant varier t de 0 à $-\infty$, on obtient un arc de courbe symétrique du premier par rapport à Ox. La courbe entière est la strophoïde ; son équation

s'obtient en remplaçant t par $\frac{y}{x}$ dans l'une des équations données, ce qui donne

$$x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2)=0.$$

12° La courbe représentée par les équations

$$x=\frac{t^3}{1-t^2}, \qquad y=\frac{1+t^2}{1-t^2}$$

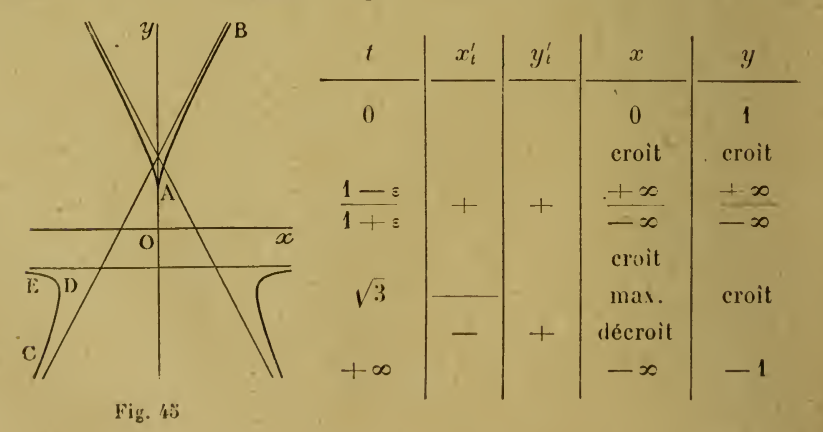
est du troisième ordre, et symétrique par rapport à Oy, car y ne change pas et x change de signe quand on change t en $-t$. Pour $t=\infty$, x devient infini et y est égal à -1, de sorte que la courbe a une asymptote parallèle à Ox d'ordonnée $y=-1$. Pour $t=+1$, x et y deviennent infinis, on a une asymptote dont le coefficient angulaire est $c=\lim\frac{y}{x}=2$, et dont l'ordonnée à l'origine est

$$d=\lim(y-cx)=\lim\frac{1+t^2-2t^3}{1-t^2}=\lim\frac{1+t+2t^2}{1+t}=2,$$

de sorte que son équation est $y=2x+2$. A la valeur $t=-1$ correspondrait l'asymptote symétrique $y=-2x+2$. Les dérivées sont

$$x'_t=\frac{3t^2-t^4}{(1-t^2)^2}, \qquad y'_t=\frac{4t}{(1-t^2)^2};$$

la première s'annule pour $t=0$ sans changer de signe, et pour $t=\pm\sqrt{3}$ en changeant de signe ; la deuxième pour $t=0$; on obtient ainsi les résultats suivants lorsque t varie de 0 à $+\infty$:



t	x'_t	y'_t	x	y
0			0	1
			croît	croît
$1-\varepsilon$	$+$	$+$	$+\infty$	$+\infty$
$1+\varepsilon$			$-\infty$	$-\infty$
			croît	
$\sqrt{3}$	———		max.	croît
	$-$	$+$	décroît	
$+\infty$			$-\infty$	-1

Fig. 45

Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe est

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4}{3t - t^3}$$

et il est infini pour $t = 0$; pour t croissant de 0 à 1, on a un arc de courbe AB tangent en A à l'axe Oy (fig. 45); lorsque t croît de 1 à $+\infty$, on a un arc CDE; il suffit de tracer les arcs symétriques des précédents par rapport à Oy pour compléter la courbe.

13° Pour que des valeurs réelles de x et de y satisfassent à l'équation $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, il faut qu'elles soient inférieures à a en valeur absolue; la courbe rencontre les axes aux points $x = \pm a$, $y = 0$, et $x = 0$, $y = \pm a$; en ces points, la tangente est confondue avec l'axe, comme le montre l'étude de la dérivée de y (fig. 46).

La courbe s'appelle *hypocycloïde à quatre rebroussements*; elle est engendrée par un point d'un cercle de rayon $\frac{a}{4}$ roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon a; en effet, soit C_0 la position initiale du centre du cercle mobile pour laquelle le point mobile A occupe la position A_0 sur le cercle fixe; soit C une autre position du centre telle que l'angle C_0OC soit égal à t, et soit B le point de contact des deux cercles; le point A est tel que les arcs BA_0 et BA soient égaux à at; par suite l'angle BCA est égal à $4t$. En projetant sur les axes le contour OCA, on a pour valeurs des coordonnées de A

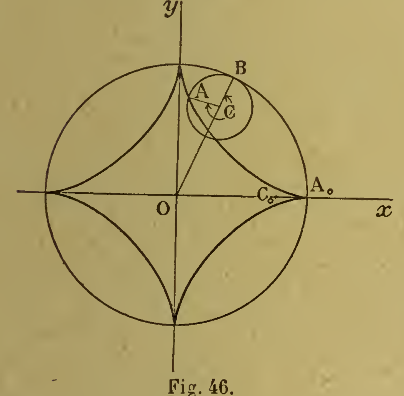


Fig. 46.

$$x = \frac{3}{4} a \cos t + \frac{a}{4} \cos 3t = a \cos^3 t,$$

$$y = \frac{3}{4} a \sin t - \frac{a}{4} \sin 3t = a \sin^3 t;$$

l'élimination de t entre les deux équations conduit bien à la relation $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. On pourrait encore utiliser les formules donnant x et y en fonction de t pour construire la courbe; il est facile de démon-

trer que la normale au point A à l'hypocycloïde va passer par le point de contact B des deux cercles.

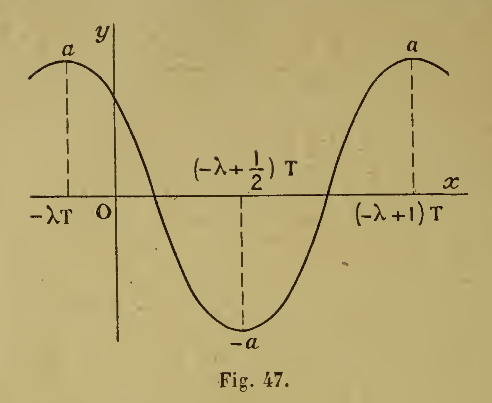


Fig. 47.

14° L'équation

$$y = a \cos 2\pi\left(\frac{x}{T} + \lambda\right)$$

représente un mouvement vibratoire ; la courbe a ses ordonnées proportionnelles à celles d'une sinusoïde ; lorsque x augmente d'un multiple entier de T, y reprend la même valeur ; il suffit donc de faire varier x de $-\lambda T$ à $(-\lambda+1)T$ pour avoir une portion de courbe que l'on transportera ensuite parallèlement à l'axe des x en lui donnant une translation égale à un multiple quelconque de T (fig. 47).

15° L'équation $y = ae^{-x} \sin mx$ représente un mouvement vibratoire amorti ; la courbe (fig. 48) est formée d'une suite d'arcs coupant l'axe Ox aux points A_k d'abscisses

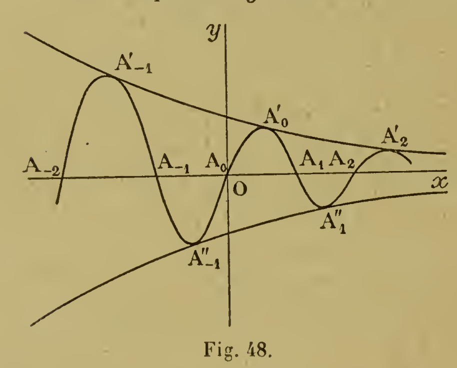


Fig. 48.

$$x_k = \frac{k\pi}{m},$$

k étant un nombre entier positif, nul ou négatif ; les ordonnées correspondant à des valeurs de l'abscisse différant de l'une d'elles d'un multiple de $\frac{\pi}{m}$ décroissent en progression géométrique. La courbe est tout entière comprise entre les deux courbes d'équations $y_1 = ae^{-x}$ et $y_2 = -ae^{-x}$; elle touche la première en des points A'_{2k} d'abscisses $x'_{2k} = \left(2k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{m}$, et la deuxième en des points A''_{2k+1} d'abscisses $x''_{2k+1} = \left(2k+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{m}$; on vérifie en effet que y et sa dérivée ont res-

pectivement la même valeur que y_1 et sa dérivée pour les premiers points et que y_2 et sa dérivée pour les autres.

16° La courbe $y = \frac{\sin x}{x}$ est symétrique par rapport à l'axe Oy qu'elle coupe au point d'ordonnée 1 ; elle coupe l'axe Ox aux points d'abscisses $k\pi\,(k \neq 0)$. Quand $|x|$ augmente, $|y|$ tend vers zéro, et la courbe a pour asymptote Ox.

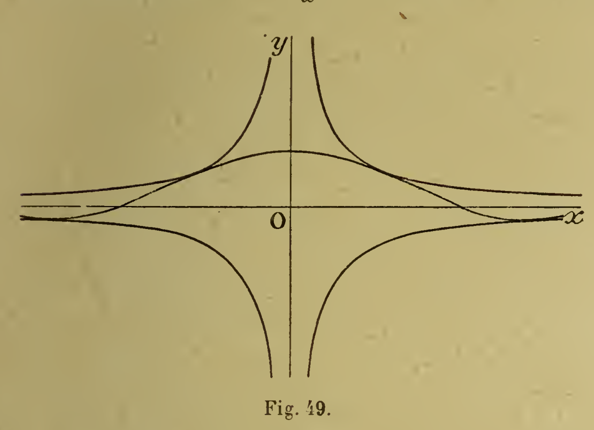


Fig. 49.

La courbe (fig. 49) est comprise entre les branches de deux hyperboles équilatères symétriques, d'équations $y_1 = \frac{1}{x}$ et $y_2 = \frac{-1}{x}$ et l'on peut voir qu'elle touche ces branches alternativement aux points d'abscisses $(2k+1)\frac{\pi}{2}\cdot$ On peut énoncer une propriété analogue pour la courbe d'équation $y = f(x) \sin x$ comparée aux courbes d'équations $y = \pm f(x)$.

17° La fonction $y = x \log x$ n'est réelle que si x est positif ; lorsque x tend vers zéro, $\log x$ tend vers $-\infty$ mais y tend vers zéro (n° 177). La dérivée $y' = \log x + 1$ est égale à $-\infty$ pour $x = 0$; elle s'annule pour $\log x = -1$, $x = \frac{1}{e}$, en passant du négatif au positif ; la fonction passe alors par un minimum égal à $-\frac{1}{e}$; elle s'annule pour $x = 1$ et croît indéfiniment avec x sans que la courbe ait d'asymptote (fig. 50).

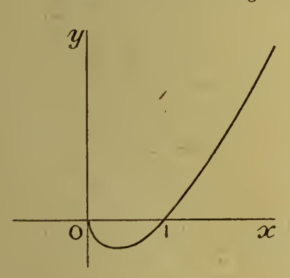


Fig. 50.

18° La fonction $y = e^{\frac{1}{x}}$ est réelle et positive pour toute valeur de x, mais elle est discontinue pour $x = 0$, car si ε est un nombre positif tendant vers zéro et si $x = +\varepsilon$, $e^{\frac{1}{x}}$ augmente indéfiniment, tandis que si $x = -\varepsilon$, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers zéro.

La dérivée $y' = \left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ est constamment négative et la fonction décroît; y a pour limite 1 pour x infini, de sorte que la courbe a une asymptote d'équation $y = 1$. Lorsque x tend vers zéro par valeurs négatives et qu'on pose $x = -\frac{1}{a}$, a croissant indéfiniment par valeurs positives, on a $y' = -\frac{a^2}{e^a}$ et cette quantité tend vers zéro (n° 176); la branche de courbe qui aboutit à l'origine a donc comme tangente l'axe des x. En calculant la dérivée seconde, $y'' = \left(\frac{2x+1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}}$, on voit que la courbe a un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$ (fig. 51).

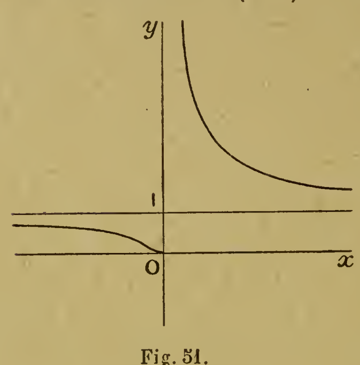


Fig. 51.

19° La fonction $\rho = \cos\frac{\theta}{2}$ reprend la même valeur quand $\frac{\theta}{2}$ augmente de 2π ou θ de 4π; il suffit donc de faire varier θ entre 0 et 4π; on remarque de plus que l'on obtient toutes les valeurs de ρ en valeur absolue en faisant varier θ de 0 à π. Dans cet intervalle, ρ diminue de 1 à 0 et l'on a un premier arc de courbe A_0AA_1O (fig. 52). Supposons que θ varie de π à 2π; à deux valeurs $\theta < \pi$ et $\theta' = 2\pi - \theta$ correspondent deux directions D et D′ et deux valeurs de ρ égales et de signes contraires donnant deux points A et A′ symétriques par rapport à Oy; on obtient ainsi un arc $OA_2A'A_3$.

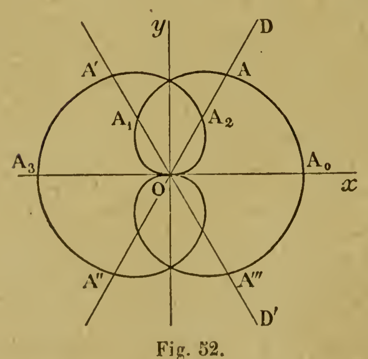


Fig. 52.

Supposons enfin que θ varie de 2π à 4π ; à deux valeurs $\theta < 2\pi$ et $\theta'' = 2\pi + \theta$ correspond la même direction D, mais les valeurs de ρ sont égales et de signes contraires, il leur correspond par conséquent deux points A et A'' symétriques par rapport au pôle O ; on obtient ainsi les arcs $A_3A''O$ et $OA'''A_0$, symétriques des premiers par rapport au point O.

20° La fonction $\rho = \sin\theta + \cos\theta$ reprend la même valeur quand θ augmente de 2π ; il suffit donc de faire varier θ de 0 à 2π ; si l'on considère deux valeurs $\theta < \pi$ et $\theta' = \pi + \theta$, ρ prend des valeurs égales et de signes contraires ; on obtient ainsi deux directions opposées, mais un même point sur ces directions ; il suffit donc de faire varier θ de 0 à π. Dans cet intervalle, ρ augmente de 1 à $\sqrt{2}$ quand θ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$, puis diminue de $\sqrt{2}$ à 0 quand θ varie de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{3\pi}{4}$ et de 0 à -1 quand θ varie de $\frac{3\pi}{4}$ à π. On obtient ainsi une courbe qui n'est autre qu'une circonférence, dont le diamètre OA_1 est égal à $\sqrt{2}$, sur la bissectrice de l'angle xOy (fig. 53) ; on a en effet $\rho = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$, ce qui est bien la projection de OA_1 sur la direction θ.

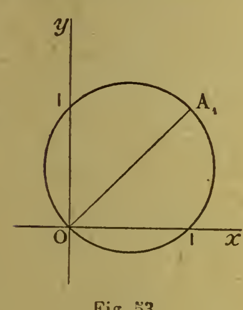


Fig. 53.

21° La fonction $\rho = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ reprend les mêmes valeurs quand $\frac{\theta}{2}$ augmente de π ou θ de 2π ; on obtient toute la courbe en faisant varier θ de 0 à 2π. A deux valeurs

$$\theta < \pi \quad \text{et} \quad \theta' = 2\pi - \theta$$

correspondent deux directions D et D' symétriques par rapport à Ox et deux valeurs ρ et ρ' égales et opposées, donc deux points A et A' symétriques par rapport à Oy ; il suffit donc de faire varier θ de 0 à π

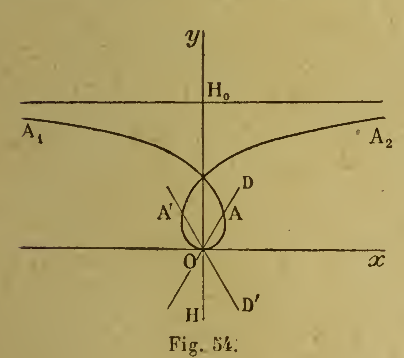


Fig. 54.

et de prendre ensuite la symétrique par rapport à Oy de la courbe ainsi obtenue.

Dans l'intervalle de 0 à π pour θ ou de 0 à $\frac{\pi}{2}$ pour $\frac{\theta}{2}$, ρ augmente de 0 à $+\infty$; on obtient ainsi (fig. 54) un arc OAA_1 s'éloignant à l'infini dans la direction asymptotique $\theta_0 = \pi$. D'après le n° 270, on obtient l'asymptote en portant dans la direction OH d'angle polaire $\theta_0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ un segment égal à

$$\lim \left[\rho \sin(\theta - \theta_0)\right] = \lim \left(-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\theta\right) = \lim\left(-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = -2;$$

l'asymptote sera donc la parallèle à Ox menée par le point H_0, extrémité d'un segment égal à -2 porté par OH, ou égal à 2 porté par Oy. L'arc $OA'A_2$, symétrique du premier par rapport à Oy, complète la courbe déjà tracée.

22° La fonction $\rho = \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta\sin\theta}$, comme celle de l'exercice antéprécédent, reprend les mêmes valeurs quand θ augmente de 2π, et prend des valeurs égales et de signes contraires quand θ augmente de π; on obtient donc tous les points de la courbe en faisant varier θ de 0 à π. Dans cet intervalle, ρ devient infini pour $\theta_0 = 0$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$; à ces directions asymptotiques correspondent les asymptotes obtenues en portant sur les directions $\frac{\pi}{2}$ et π un segment égal à 1, d'après la règle du n° 270; de plus ρ s'annule pour $\theta = \frac{\pi}{4}$; on obtient ainsi la courbe de la figure 55; elle est une hyperbole, car en transformant l'équation en coordonnées cartésiennes, on obtient $xy = x - y$.

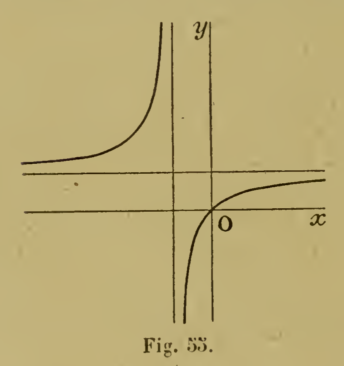


Fig. 55.

Plus généralement, toute équation de la forme

$$\rho = \frac{a\cos\theta + b\sin\theta}{A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta}$$

représente une conique passant par l'origine, car l'équation transformée en coordonnées cartésiennes est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = ax + by.$$

23° La fonction $\rho = \dfrac{1}{2 + \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta}$ reprend les mêmes valeurs quand θ augmente de 2π ; on obtient tous les points de la courbe en faisant varier θ de 0 à 2π. En remplaçant $\sqrt{3}$ par $\cot g \dfrac{\pi}{6}$, on peut mettre l'équation sous la forme

$$\rho = \frac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{2\sin\dfrac{\pi}{6} + \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)} = \frac{\dfrac{1}{2}}{1 + \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)};$$

on reconnaît l'équation d'une parabole de paramètre $\dfrac{1}{2}$ ayant pour foyer l'origine et pour axe la droite de direction $\dfrac{\pi}{6}$, comme l'indique la figure 56.

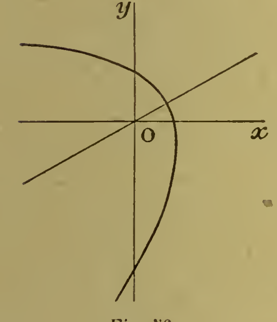


Fig. 56.

Toute équation de la forme

$$\rho = \frac{a}{b + c\cos\theta + d\sin\theta}$$

représente une conique ayant pour foyer l'origine, car on peut toujours la ramener à la forme $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$.

---

149. — *Démontrer que l'équation* $PQ = k$, *où* P *et* Q *sont des fonctions linéaires de* x *et* y, *et* k *une constante, représente une hyperbole dont les asymptotes sont* $P = 0$ *et* $Q = 0$.

Supposons que les droites $P = 0$ et $Q = 0$ ne soient pas parallèles entre elles ni aux axes de coordonnées ; nous pouvons ramener l'équation à la forme

$$(y - cx - d)(y - c'x - d') = k.$$

Les directions asymptotiques sont obtenues en égalant à zéro

l'ensemble des termes de plus haut degré $(y - cx)(y - c'x)$ et ont pour coefficients angulaires c et c'. Sur la branche de direction asymptotique c, la quantité $y - c'x$ devient infinie avec x et en écrivant l'équation de la courbe sous la forme

$$y = cx + d + \frac{k}{y - c'x - d'},$$

on voit que le dernier terme du second membre tend vers zéro ; par suite la droite d'équation $y = cx + d$ est asymptote à la branche de courbe. De même, sur la branche de direction asymptotique c', on a

$$y = c'x + d' + \frac{k}{y - cx - d}$$

et le dernier terme tend vers zéro, de sorte que la droite d'équation $y = c'x + d'$ est l'autre asymptote.

On peut faire des raisonnements analogues dans le cas où l'une ou l'autre des droites $P = 0$, $Q = 0$ est parallèle à l'un des axes de coordonnées. Dans le cas où ces deux droites sont parallèles, on a $Q = P + h$, h étant une constante, et l'équation $P(P + h) = k$ représente deux droites parallèles aux droites données.

---

150. — *Construire la courbe définie par les équations*

$$x = a \sin \frac{2\pi t}{T}, \qquad y = b \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T},$$

où t est un paramètre variable, et former l'équation de cette courbe ; déterminer les directions et les longueurs de ses axes en cherchant le maximum ou le minimum de $x^2 + y^2$.

Les coordonnées x et y sont des fonctions périodiques de t, la période étant égale à T ; il suffit de faire varier t dans un intervalle $(t_0, t_0 + T)$ égal à la période, ou dans un intervalle moitié moindre, en prenant ensuite la symétrique par rapport à l'origine de la portion de courbe obtenue.

Les valeurs remarquables de t sont $\frac{kT}{4}$ pour x et $t_0 + \frac{kT}{4}$ pour y, k étant un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif; on peut

supposer t_0 compris lui-même entre 0 et T; suivant les valeurs qu'il possède, on a différentes formes de courbes, toutes inscrites dans les droites parallèles aux axes d'équations $x = \pm a$, $y = \pm b$.

Nous désignons par A_k un point correspondant à $t = \frac{kT}{4}$ et par B_k un point correspondant à $t = t_0 + \frac{kT}{4}$; lorsque t croît, les points

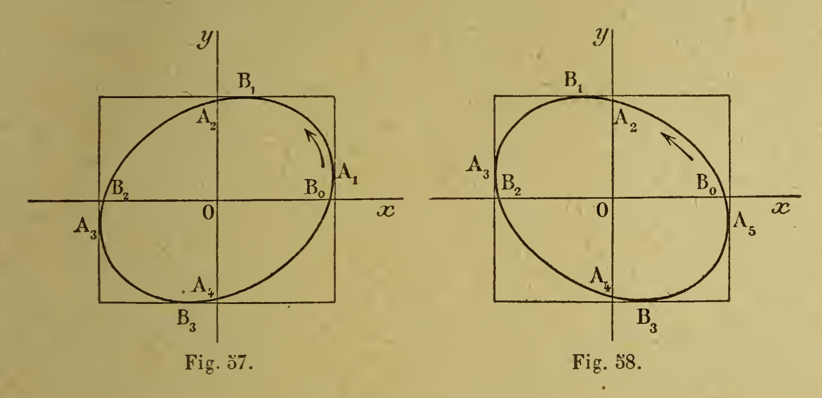


Fig. 57. Fig. 58.

se succèdent à partir de B_0 dans le sens de la flèche. La figure 57 correspond au cas où $0 < t_0 < \frac{T}{4}$, la figure 58 au cas où $\frac{T}{4} < t_0 < \frac{T}{2}$,

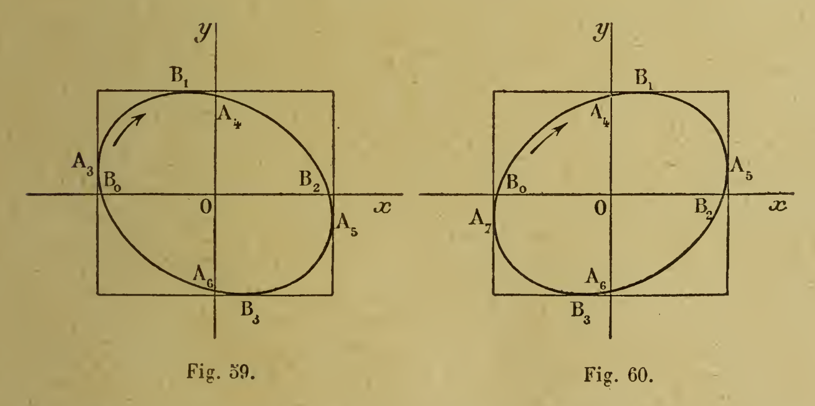


Fig. 59. Fig. 60.

la figure 59 au cas où $\frac{T}{2} < t_0 < \frac{3T}{4}$, et la figure 60 au cas où $\frac{3T}{4} < t_0 < T$. Les cas particuliers sont ceux où $t_0 = 0$; la courbe se

confond avec la portion de la droite $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ comprise entre les abscisses $-a$ et $+a$; puis le cas $t_0=\frac{T}{2}$ où la courbe se confond alors avec la portion analogue de la droite $\frac{x}{a}=-\frac{y}{b}$; enfin les cas $t_0=\frac{T}{4}$ et $t_0=\frac{3T}{4}$ où la courbe a pour axes de symétrie les axes de coordonnées.

On obtient l'équation de la courbe en tirant $\sin\frac{2\pi t}{T}$ et $\cos\frac{2\pi t}{T}$ des équations donnant x et y, et en écrivant que la somme des carrés est égale à l'unité ; on obtient ainsi l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\frac{2\pi t_0}{T}+\frac{y^2}{b^2}-\sin^2\frac{2\pi t_0}{T}=0$$

qui représente une ellipse, sauf si $t_0=\frac{kT}{2}$, auquel cas elle représente une droite double passant par l'origine.

On peut trouver les longueurs des axes de cette ellipse en la rapportant à ses axes de symétrie (nº 275) ou bien en cherchant le maximum ou le minimum de

$$\rho^2=x^2+y^2=a^2\sin^2\frac{2\pi t}{T}+b^2\sin^2\frac{2\pi(t-t_0)}{T_0}.$$

En annulant la dérivée de cette expression prise par rapport à t, on obtient l'équation

$$a^2\sin\frac{4\pi t}{T}+b^2\sin\frac{4\pi(t-t_0)}{T}=0,\quad \text{d'où}\quad \operatorname{tg}\frac{4\pi t}{T}=\frac{b^2\sin\frac{4\pi t_0}{T}}{a^2+b^2\cos\frac{4\pi t_0}{T}};$$

les valeurs ainsi obtenues pour t fournissent les sommets de la courbe, et l'on en déduit les valeurs de ρ^2 correspondantes. La méthode de l'exercice 87 aurait donné comme équation fournissant les demi-axes

$$\frac{1}{\rho^4}\sin^2\frac{2\pi t_0}{T}-\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{1}{a^2b^2}=0,$$

ou

$$\rho^4-\rho^2(a^2+b^2)+a^2b^2\sin^2\frac{2\pi t_0}{T}=0;$$

la somme des carrés des demi-axes est égale à a^2+b^2 quelle que soit la valeur de t_0.

151. — *Une droite de longueur constante se déplace de façon que ses extrémités restent sur Ox et sur Oy; démontrer que le lieu d'un point particulier de cette droite est une ellipse.*

Soit M (fig. 61) un point quelconque fixé sur une droite dont deux points A et B se déplacent l'un sur Oy et l'autre sur Ox; désignons par a et b les valeurs algébriques des segments AM et MB comptés positivement dans la direction AB. Les coordonnées du point M sont

$$x = (\mathrm{OB})\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = (\mathrm{OB})\frac{a}{a+b}, \qquad y = (\mathrm{OA})\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{AB}} = (\mathrm{OA})\frac{b}{a+b};$$

en écrivant que $\overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{OB}}^2 = (a+b)^2$, on obtient l'équation du lieu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

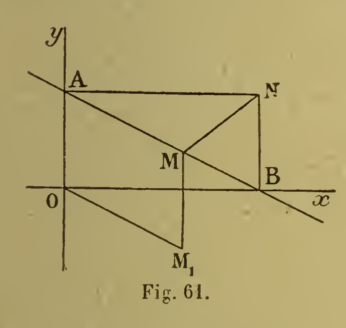


Fig. 61.

le lieu est une ellipse ayant pour demi-axes les valeurs absolues de a et b. On peut démontrer géométriquement la proposition précédente en traçant un segment OM_1 égal et parallèle à AM; le point M_1 a pour lieu un cercle de rayon a et les points M et M_1 sont sur une même parallèle à Oy; le rapport de leurs ordonnées est en valeur absolue égal à $\frac{b}{a}$; le point M décrit donc une ellipse de demi-axes a et b (n° 91).

Remarque. — La normale à l'ellipse au point M passe par le dernier sommet N du rectangle de côtés OA et OB; cette proposition, qui découle facilement des principes de la cinématique, résulte aussi de l'équation de la normale

$$\frac{a^2(\mathrm{X}-x)}{x} = \frac{b^2(\mathrm{Y}-y)}{y};$$

en y remplaçant x et y par les valeurs trouvées précédemment, on vérifie que l'équation est satisfaite par les coordonnées du point N.

---

152. — *On appelle podaire d'une courbe par rapport à un point le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les*

tangentes à la courbe; déterminer la podaire d'une conique par rapport à un de ses foyers, celle d'une ellipse par rapport à son centre, celle d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre, celle d'une circonférence par rapport à un de ses points, celle d'une parabole par rapport à son sommet; transformer en coordonnées polaires les équations des courbes obtenues, et les construire.

Soient x_0 et y_0 les coordonnées d'un point fixe A d'où l'on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes à la courbe d'équation $f(x, y) = 0$; la tangente en un point (x, y) et la perpendiculaire abaissée du point A sur cette droite ont pour équations

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y = 0, \qquad \frac{X - x_0}{f'_x} = \frac{Y - y_0}{f'_y};$$

en éliminant x et y entre ces équations et celle de la courbe, on obtient l'équation de la podaire.

1° Supposons que la courbe soit une ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

en joignant à cette relation les deux équations

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} - 1 = 0, \qquad \frac{X - x_0}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y - y_0}{\frac{y}{b^2}},$$

et éliminant x et y, on obtient l'équation cherchée :

$$(X^2 + Y^2 - x_0X - y_0Y)^2 = a^2(X - x_0)^2 + b^2(Y - y_0)^2;$$

elle représente une courbe du quatrième ordre sans asymptote et ayant un point double au point donné (x_0, y_0).

Nous remplacerons dans ce qui suit X, Y par x, y, ce qui ne modifie pas les résultats; nous supposerons de plus $a > b$.

Si le point (x_0, y_0) est un foyer, on a $x_0 = c = \sqrt{a^2 - b^2}, y_0 = 0$; le premier membre se décompose en un produit des deux facteurs

$$(x^2 + y^2 - a^2)(x^2 + y^2 - 2cx + c^2) = 0;$$

le deuxième, égalé à zéro, représente un cercle de rayon nul ayant pour centre le foyer considéré; le premier, égalé à zéro, représente le cercle principal de l'ellipse, qui est le lieu fourni par les raisonnements géométriques habituels. Le même calcul sert aussi pour une hyperbole.

Si le point donné est le centre, x_0 et y_0 sont nuls et l'équation de la podaire se réduit à

$$(x^2+y^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2)=0\,;$$

elle représente une courbe symétrique par rapport aux axes de coordonnées, ayant à l'origine un point double isolé, et n'ayant pas de point à l'infini.

On peut discuter l'équation en la considérant comme bicarrée en x ou en y ; nous parviendrons plus rapidement aux résultats de la discussion en cherchant les points où la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des x ; ils satisfont à l'équation

$$f'_x=2x[2(x^2+y^2)-a^2]=0\,;$$

ils sont donc à l'intersection de la courbe, d'une part avec l'axe des y, et d'autre part avec le cercle concentrique à l'ellipse et de rayon $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Si ce rayon est inférieur à b, c'est-à-dire si $b>\frac{a}{\sqrt{2}}$, la podaire enveloppe l'ellipse et a une forme analogue à celle de cette courbe sans présenter aucun point d'inflexion ; mais si $b<\frac{a}{\sqrt{2}}$, la podaire présente des points d'inflexion comme l'indique la figure 62. Nous y avons tracé le cercle de rayon $\frac{a}{\sqrt{2}}$ passant par les points où y est maximum en valeur absolue.

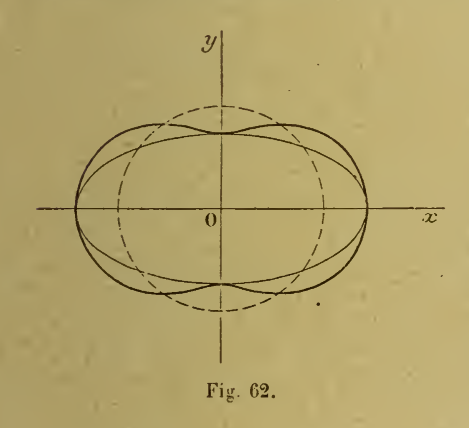


Fig. 62.

L'équation de la courbe en coordonnées polaires est

$$\rho^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{a^2-b^2}{2}\cos 2\theta.$$

2° Supposons que l'on cherche la podaire d'une hyperbole par

rapport à son centre; il suffit de changer dans le calcul précédent b^2 en $-b^2$, l'équation du lieu est

$$(x^2+y^2)^2-(a^2x^2-b^2y^2)=0.$$

La courbe a un point double à l'origine, mais cette fois à tangentes réelles d'équations

$$ax=\pm by;$$

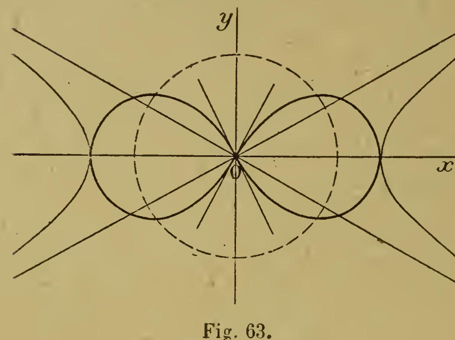


Fig. 63.

ces droites sont les perpendiculaires aux asymptotes de l'hyperbole. Les points où la tangente est parallèle à Ox sont encore les points de rencontre de la courbe avec le cercle de rayon $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (fig. 63).

Dans le cas où l'hyperbole est équilatère, b est égal à a, et l'équation du lieu devient

$$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0, \qquad \rho^2=a^2\cos 2\theta;$$

c'est celle d'une lemniscate (n° 253).

3° Supposons que la courbe soit une parabole d'équation $y^2-2px=0$; les équations d'une tangente en un point (x, y) et de la perpendiculaire abaissée sur cette tangente d'un point (x_0, y_0) sont

$$Yy-p(X+x)=0, \qquad \frac{X-x_0}{-p}=\frac{Y-y_0}{y};$$

l'élimination de x et y entre ces équations et celle de la parabole donne la relation

$$2(X-x_0)[X^2+Y^2-x_0X-y_0Y]+p(Y-y_0)^2=0.$$

La courbe représentée par cette équation est du troisième ordre; elle a une asymptote parallèle à l'axe Oy, dont l'équation, obtenue en annulant le coefficient de Y^2, est $X=x_0-\frac{p}{2}$; la courbe présente un point double au point donné (x_0, y_0).

Si ce point est le foyer, on a $x_0 = \frac{p}{2}$, $y_0 = 0$; l'équation s'écrit, en remplaçant comme précédemment X, Y par x, y,

$$2x\left[\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2\right]=0.$$

Le second facteur égalé à zéro représente un cercle de rayon nul ayant pour centre le foyer; l'autre facteur égalé à zéro représente l'axe des y, c'est-à-dire la tangente au sommet de la parabole. Ce résultat est conforme à celui qui est fourni par les raisonnements géométriques.

Si le point donné est le sommet de la courbe, c'est-à-dire l'origine, x_0 et y_0 sont nuls, l'équation de la podaire est

$$2x(x^2+y^2)+py^2=0;$$

elle représente une cissoïde (n° 253) ayant pour asymptote la directrice de la parabole $x = -\frac{p}{2}$ et pour point de rebroussement l'origine; elle est tournée en sens contraire de celle du n° 253; l'équation transformée en coordonnées polaires est $\rho = -\frac{p \sin^2\theta}{2\cos\theta}$.

4° Si la courbe donnée est une circonférence rapportée à son centre, on peut utiliser le calcul fait pour l'ellipse et y remplacer a et b par le rayon r du cercle; on peut toujours supposer y_0 nul, de sorte que l'équation de la podaire est

$$(X^2+Y^2-x_0X)^2=r^2[(X-x_0)^2+Y^2].$$

Si l'on transporte l'origine au point x_0 en remplaçant X par x_0+X' et Y par Y', et si l'on écrit encore x et y à la place de X et Y', on obtient l'équation

$$(x^2+y^2+x_0x)^2-r^2(x^2+y^2)=0;$$

elle représente une courbe du quatrième ordre sans asymptote; l'origine est un point double et l'on y trouve facilement les tangentes.

En transformant l'équation en coordonnées polaires, on obtient

$$\rho=\pm r-x_0\cos\theta.$$

Cette équation représente, quel que soit le signe adopté pour $\pm r$, un limaçon de Pascal (n° 269). La podaire d'une circonférence par rapport à un point de son plan est donc un limaçon de Pascal.

Il est facile de le démontrer géométriquement: si P (fig. 64) est le pied de la perpendiculaire abaissée d'un point O sur la tangente au point T à une circonférence de centre C et si l'on mène par C la parallèle CM à la tangente, le lieu de M est une circonférence de diamètre OC et le point P est tel que le segment MP porté sur chaque rayon vecteur OM est égal au rayon du cercle C; le lieu de P est donc un limaçon. Il a un point double à tangentes réelles si O est extérieur au cercle, à tangentes imaginaires s'il est intérieur et à tangentes confondues s'il est sur le cercle; dans ce dernier cas, la podaire est une cardioïde.

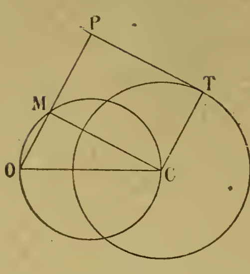


Fig. 64.

---

153. — *Former l'équation du lieu des points d'un plan dont le produit des distances à deux points fixes de ce plan est constant; construire la courbe obtenue.*

Soient P et P′ les deux points fixes donnés; prenons comme axe des x la droite joignant ces deux points et comme origine le milieu du segment qu'ils déterminent; désignons par $+a$ et $-a$ leurs abscisses, et par x, y les coordonnées d'un point M du lieu. La relation donnée, que nous écrirons sous la forme $\overline{MP}^2 . \overline{MP'}^2 = k^4$, est traduite par l'équation

$$[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2]=k^4,$$

ou

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4-k^4=0.$$

Cette équation représente une courbe du quatrième ordre n'ayant pas d'asymptote; nous la résoudrons par rapport à y après l'avoir écrite sous la forme

$$y^4+2(x^2+a^2)y^2+(x^2-a^2)^2-k^4=0;$$

elle n'a de racines réelles que si le dernier terme est négatif, c'est-à-dire si l'on a

$$(x^2-a^2-k^2)(x^2-a^2+k^2)<0,$$

et dans ces conditions, elle n'a que deux racines réelles et de signes contraires.

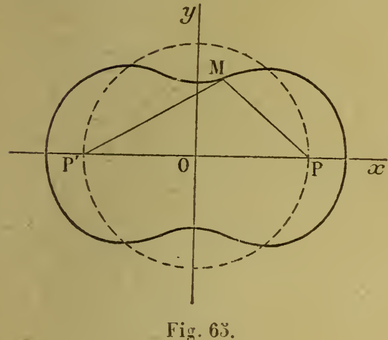


Fig. 65.

Si $k^2 > a^2$, le deuxième facteur du premier membre de l'inégalité précédente est positif, il faut et il suffit que x soit compris entre $-\sqrt{a^2+k^2}$ et $+\sqrt{a^2+k^2}$; la courbe a une seule branche fermée comme l'indique la figure 65.

Si $k^2 < a^2$, x doit être en valeur absolue compris entre $\sqrt{a^2-k^2}$ et $\sqrt{a^2+k^2}$; et la courbe comprend deux parties distinctes, comme l'indique la figure 66.

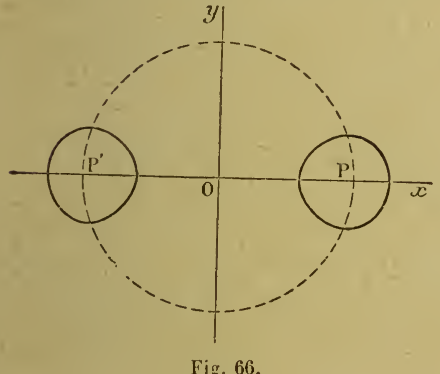


Fig. 66.

Si $k^2 = a^2$, la courbe passe à l'origine et est une lemniscate (n° 253).

Les points où la tangente est parallèle à Ox sont fournis, comme dans le cas de la podaire de l'exercice précédent, par l'intersection de la courbe avec la ligne représentée par

$$4x(x^2+y^2-a^2)=0,$$

qui comprend l'axe des y et le cercle de rayon a décrit sur PP' comme diamètre; en calculant les coordonnées des points communs à ce cercle et la courbe, on constate qu'ils ne sont réels que si $k^2 < 2a^2$.

Les courbes précédentes sont appelées ovales de Cassini.

---

154. — *Une circonférence variable est constamment tangente à l'axe des x au point O; on joint un point fixe de l'axe des x au centre de cette circonférence; former l'équation du lieu des points de rencontre de la droite ainsi tracée et de la circonférence; ce lieu s'appelle une strophoïde; construire cette courbe.*

Soit a l'abscisse du point fixe A de l'axe Ox (fig. 67) et b l'ordonnée du centre variable B de la circonférence tangente en O à Ox; les équations de la circonférence et de la droite AB sont

$$x^2 + y^2 - 2by = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

En éliminant le paramètre b entre ces deux relations, on obtient l'équation du lieu

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0.$$

Cette équation représente une courbe du troisième ordre ayant pour axe Ox, une asymptote parallèle à Oy, d'abscisse $x = -a$ et ayant un point double à l'origine avec des tangentes dirigées suivant les bissectrices des angles des axes. Il est facile de construire la courbe en résolvant l'équation par rapport à y sous la forme

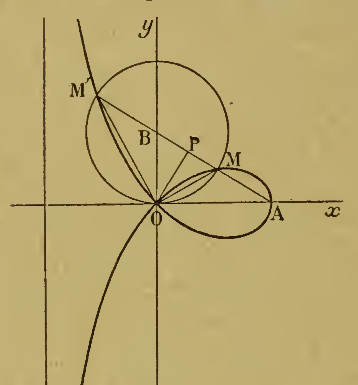


Fig. 67.

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^2(a - x)}{a + x}}.$$

L'équation transformée en coordonnées polaires s'écrit $\rho = \dfrac{a \cos 2\theta}{\cos \theta}$; on peut trouver directement cette équation en écrivant la relation des sinus dans le triangle OMA dont les angles MOA et MAO sont égaux à θ et $\dfrac{\pi}{2} - 2\theta$; on peut aussi remarquer que si l'on abaisse de O la perpendiculaire OP sur AB, les droites OM et OM' sont les bissectrices des angles en O du triangle rectangle OPA ; il suffit alors d'écrire

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OM} \cos \widehat{\mathrm{POM}} = \mathrm{OA} \cos \widehat{\mathrm{POA}}$$

pour retrouver l'équation de la courbe en coordonnées polaires.

---

155. — *L'origine étant pôle d'inversion, trouver la figure inverse d'une droite, d'une circonférence, d'une conique dont un foyer est à l'origine, d'une hyperbole équilatère ayant l'origine pour centre.*

En appliquant la remarque du n° 81, il est avantageux de former l'équation en coordonnées polaires de la ligne dont on veut trouver l'inverse ; nous appellerons k la puissance d'inversion.

Si l'on donne une droite parallèle à Oy, d'abscisse a, son équation est $\rho = \frac{a}{\cos\theta}$ et l'équation de l'inverse est $\rho' = \frac{k}{a}\cos\theta$; elle représente une circonférence passant par le pôle.

Si l'on donne une circonférence ayant son centre sur Ox et ne passant pas par O, son équation est de la forme

$$x^2 + y^2 - 2ax + b = 0, \qquad \rho^2 - 2a\rho\cos\theta + b = 0,$$

l'équation de l'inverse est

$$\frac{k^2}{\rho'^2} - 2a\frac{k}{\rho'}\cos\theta + b = 0, \qquad \rho'^2 - 2\frac{ak}{b}\rho'\cos\theta + \frac{k^2}{b} = 0 ;$$

elle représente une autre circonférence.

Si l'on donne une conique ayant pour foyer l'origine et pour axe Ox, son équation est $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$ et celle de l'inverse est

$$\rho' = \frac{k}{p} + \frac{ke}{p}\cos\theta ;$$

celle-ci représente un limaçon de Pascal ; les tangentes au pôle sont réelles si $e > 1$, c'est-à-dire si la conique est une hyperbole ; elles sont imaginaires si $e < 1$, c'est-à-dire si la conique est une ellipse, enfin elles sont confondues et la courbe est une cardioïde si la conique est une parabole.

Si l'on donne une hyperbole équilatère ayant pour centre l'origine et pour axe transverse Ox, son équation est de la forme

$$x^2 - y^2 = a^2, \qquad \rho^2\cos 2\theta = a^2 ;$$

celle de son inverse est $\rho'^2 = \frac{k^2}{a^2}\cos 2\theta$, elle représente une lemniscate.

---

156. — *Trouver le lieu des milieux des cordes d'une conique passant par un point donné.*

Le milieu d'une corde d'une conique est l'intersection de cette corde avec le diamètre correspondant (n° 279). Si x_0, y_0 sont les coor-

données du point donné, les équations de la corde et du diamètre sont de la forme

$$y - y_0 = m(x - x_0), \qquad f'_x + m f'_y = 0,$$

et il suffit, pour avoir l'équation du lieu, d'éliminer m entre les deux équations, ce qui donne la relation

$$f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0) = 0.$$

Le lieu est une conique passant par le point (x_0, y_0) et par le centre de la conique donnée; les deux courbes sont homothétiques, car les termes du second degré sont les mêmes dans les deux équations (n° 286); avec la notation habituelle l'équation du lieu peut encore être écrite

$$f(x, y) - \frac{1}{2}(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + f'_{z_0}) = 0;$$

on voit que ce lieu coupe la conique donnée aux points communs à cette courbe et à la polaire du point (x_0, y_0).

Il peut arriver qu'une partie du lieu corresponde à des cordes coupant la conique donnée en deux points imaginaires, mais le milieu du segment limité à ces deux points est quand même réel.

---

157. — *Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées parallèlement à une direction donnée à des coniques homofocales.*

Des ellipses et des hyperboles homofocales sont représentées par l'équation de l'exercice 142 :

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = 0.$$

Les points de contact des tangentes à l'une de ces courbes parallèles à une direction de coefficient angulaire m sont à l'intersection de la courbe avec le diamètre d'équation $\frac{x}{a^2 - \lambda} + m\frac{y}{b^2 - \lambda} = 0$; on aura l'équation du lieu en éliminant m entre les deux relations. Si l'on déduit de la dernière les égalités

$$\frac{a^2 - \lambda}{x} = \frac{b^2 - \lambda}{-my} = \frac{c^2}{x + my},$$

et si l'on transporte dans l'équation des coniques les valeurs de $a^2 - \lambda$ et $b^2 - \lambda$ ainsi déterminées, on obtient une équation qui se décompose en plusieurs autres, d'abord $xy = 0$ représentant les axes, puis

$$(x + my)(y - mx) + mc^2 = 0$$

représentant une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les droites $y = mx$ et $y = -\frac{1}{m}x$; cette hyperbole passe par les foyers.

Si la conique est une parabole, on aura, avec les notations de l'exercice 143, à éliminer λ entre les équations

$$\frac{y^2}{p - \lambda} - 2x + \lambda = 0, \qquad -1 + \frac{my}{p - \lambda} = 0;$$

le lieu se compose de l'axe des x et de la droite d'équation

$$2mx + (m^2 - 1)y - mp = 0$$

passant par le foyer.

---

158. — *Démontrer que la polaire d'un point de la directrice d'une conique quelconque passe par le foyer correspondant et est perpendiculaire à la droite joignant le point à ce foyer.*

Si la conique est une ellipse rapportée à ses axes, un point de la directrice a pour coordonnées $x_0 = \frac{a^2}{c}$ et y_0; la polaire de ce point a pour équation $\frac{x}{c} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$. On vérifie qu'elle passe par le foyer $x = c$, $y = 0$ et est perpendiculaire à la droite joignant ce foyer au point (x_0, y_0).

Une vérification analogue se fait dans le cas d'une hyperbole ou d'une parabole.

---

159. — *Démontrer que si l'on joint un point d'une ellipse aux extrémités d'un diamètre quelconque, on forme deux droites parallèles à deux diamètres conjugués. Étudier la variation de l'angle de deux diamètres conjugués d'une ellipse.*

Soit φ le paramètre d'un point de l'ellipse que l'on joint à deux

points diamétralement opposés dont les paramètres sont φ_0 et $\varphi_0+\pi$; les coefficients angulaires des cordes sont

$$\frac{b(\sin\varphi-\sin\varphi_0)}{a(\cos\varphi-\cos\varphi_0)},\qquad \frac{b(\sin\varphi+\sin\varphi_0)}{a(\cos\varphi+\cos\varphi_0)};$$

on vérifie bien que leur produit est égal à $-\frac{b^2}{a^2}$ (n°s 281 et 282); elles sont donc parallèles à deux diamètres conjugués.

L'angle des deux diamètres conjugués correspondant aux paramètres φ et $\varphi'=\varphi+\frac{\pi}{2}$ est donné par l'équation

$$\operatorname{tg} V=\frac{m'-m}{1+mm'}=\frac{-ab}{c^2}(\operatorname{cotg}\varphi+\operatorname{tg}\varphi);$$

son maximum ou son minimum ont lieu pour $\varphi=\frac{\pi}{4}$ et $\varphi=\frac{3\pi}{4}$; les diamètres conjugués correspondants sont les diagonales du rectangle dont les côtés sont les tangentes aux extrémités des axes; ces diamètres sont égaux et l'on a alors $\operatorname{tg} V=\pm\frac{2ab}{c^2}$.

---

160. — *Montrer que les formules*

$$(1+t^2)x=(1-t^2)x'-2ty',$$
$$(1+t^2)y=2tx'+(1-t^2)y'$$

définissent dans le plan une transformation de coordonnées rectangulaires en d'autres rectangulaires ayant la même origine; de même, les formules

$$\rho x=(1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2)x'+2(\lambda\mu-\nu)y'+2(\lambda\nu+\mu)z',$$
$$\rho y=2(\mu\lambda+\nu)x'+(1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2)y'+2(\mu\nu-\lambda)z',$$
$$\rho z=2(\nu\lambda-\mu)x'+2(\mu\nu+\lambda)y'+(1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2)z',$$

où

$$\rho=1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2,$$

définissent dans l'espace une transformation de coordonnées rectangulaires en d'autres rectangulaires ayant la même origine.

Il suffit de vérifier que les premières formules peuvent être mises sous la forme (10) du n° 273; l'on y parvient immédiatement en posant

$t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, ce qui donne en même temps la signification du paramètre t, il est la tangente de la moitié de l'angle de rotation des axes de coordonnées.

Les deuxièmes formules peuvent de même être mises sous la forme (4) du n° 305 ; il suffit alors de vérifier que les coefficients satisfont aux conditions que doivent remplir les cosinus, c'est-à-dire aux équations

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$

et aux autres analogues, ce qui se fait facilement.

La signification géométrique des paramètres λ, μ, ν est la suivante :

Soit OD une droite issue de l'origine et faisant avec Ox, Oy, Oz des angles dont les cosinus sont α, β, γ ; autour de cette droite on fait tourner le trièdre $Oxyz$ tout d'une pièce d'un angle θ et on lui donne une position $Ox'y'z'$; on peut montrer que les paramètres ont pour valeurs

$$\lambda = \alpha \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \qquad \mu = \beta \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \qquad \nu = \gamma \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Pour le voir, on imagine un trièdre trirectangle particulier OXYZ dont l'axe OZ est dirigé suivant OD ; l'axe OX est dans le plan DOx, et l'axe OY est perpendiculaire à ce plan ; une rotation autour de OZ d'un angle θ définit une transformation de coordonnées fournie par des formules analogues à celles de la géométrie plane ; en les appliquant à des points situés sur les axes Ox, Oy, Oz à une distance de O égale à l'unité, on peut évaluer les coordonnées dans le système primitif des nouvelles positions des points ainsi choisis et ce sont les cosinus directeurs cherchés.

---

161. — *Rapporter à ses axes la conique représentée par l'équation*

$$x^2 + 2\lambda xy + y^2 + a^2(\lambda^2 - 1) = 0 ;$$

discuter suivant la valeur de λ ; *montrer que la somme des carrés des axes a une valeur constante quel que soit* λ.

L'équation étant symétrique par rapport à x et y, les axes de la courbe sont les bissectrices des angles des axes de coordonnées et il

suffit de faire tourner ceux-ci d'un angle égal à $\frac{\pi}{4}$; les formules de transformation sont

$$x=(x'-y')\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad y=(x'+y')\frac{\sqrt{2}}{2},$$

et la nouvelle équation est

$$x'^2(1+\lambda)+y'^2(1-\lambda)+a^2(\lambda^2-1)=0.$$

Si λ^2-1 n'est pas nul, l'équation se ramène à

$$\frac{x'^2}{a^2(1-\lambda)}+\frac{y'^2}{a^2(1+\lambda)}-1=0;$$

elle représente une ellipse lorsque λ est compris entre -1 et $+1$, une hyperbole d'axe transverse Ox' lorsque $\lambda<-1$, et une hyperbole d'axe transverse Oy' lorsque $\lambda>1$.

Dans tous les cas, la somme des valeurs algébriques des carrés des demi-axes est égale à $2a^2$; de plus, toutes les courbes sont tangentes aux quatre côtés du carré formé par les droites d'équations $x=\pm a$, $y=\pm a$.

Lorsque $\lambda=-1$, l'équation représente une droite double confondue avec Ox', et lorsque $\lambda=+1$, elle représente une droite double confondue avec Oy'.

---

162. — *Démontrer que si deux coniques ont leurs axes parallèles, leurs quatre points d'intersection sont sur une même circonférence et, réciproquement, toutes les coniques passant par quatre points d'une circonférence ont leurs axes parallèles. Parmi ces coniques combien y a-t-il de paraboles?*

Les équations de deux coniques ayant leurs axes parallèles aux axes de coordonnées sont de la forme

$$f(x, y)=Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$
$$\varphi(x, y)=A_1x^2+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0;$$

toutes les coniques passant par les points communs à ces deux courbes sont représentées par l'équation (n° 285) $f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)=0$ et elles ont leurs axes parallèles à ceux des coniques données; parmi ces

dernières se trouve un cercle obtenu en choisissant λ de façon que $A + \lambda A_1 = C + \lambda C_1$.

Réciproquement, si l'on considère un cercle d'équation $\varphi = 0 (A_1 = C_1)$ et une conique passant par quatre points de ce cercle, on peut choisir les axes de coordonnées de façon qu'elle soit représentée par une équation $f = 0$ de la forme précédente; alors toutes les autres coniques passant par les mêmes points ont leurs axes parallèles à ceux de la première.

Parmi ces coniques se trouvent deux paraboles obtenues en faisant $A + \lambda A_1 = 0$ ou $C + \lambda C_1 = 0$; il se trouve aussi trois couples de droites, ce sont les couples de côtés opposés et les diagonales du quadrilatère ayant pour sommets les quatre points ; les bissectrices des angles formés par ces couples de droites ont les mêmes directions que les axes des coniques.

---

163. — *Le sommet d'un angle droit se déplace sur une droite ou sur une circonférence données; l'un de ses côtés passe par un point fixe; démontrer que l'enveloppe de l'autre côté est une conique ayant pour foyer le point fixe.*

Supposons qu'un angle droit ait son sommet M variable sur l'axe Oy et qu'un de ses côtés passe par un point M_0 d'abscisse x_0, situé sur Ox; si b est l'ordonnée du point M, le coefficient angulaire de M_0M est $-\frac{b}{x_0}$; l'équation du second côté de l'angle droit est

$$y - b = \frac{x_0 x}{b} \qquad \text{ou} \qquad x x_0 - by + b^2 = 0.$$

L'enveloppe de cette droite a pour équation $y^2 - 4xx_0 = 0$; elle est une parabole ayant pour foyer M_0 et pour tangente au sommet Oy.

De la même manière, si le point M décrit un cercle de rayon r ayant pour centre l'origine, et si φ est son paramètre angulaire, ses coordonnées sont $r \cos \varphi$ et $r \sin \varphi$; le coefficient angulaire de M_0M est $\frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi - x_0}$, et l'équation du deuxième côté de l'angle droit est

$$y - r \sin \varphi = \frac{x_0 - r \cos \varphi}{r \sin \varphi} (x - r \cos \varphi).$$

ou

$$(x+x_0)r\cos\varphi+yr\sin\varphi-xx_0-r^2=0.$$

L'équation dérivée par rapport à φ,

$$-(x+x_0)\sin\varphi+y\cos\varphi=0,$$

est celle d'une droite contenant le point caractéristique et il est facile de la construire ; l'élimination de φ entre les deux équations fournit l'équation de l'enveloppe

$$r^2(x+x_0)^2+r^2y^2=(xx_0+r^2)^2.$$

Si x_0 n'est pas égal à $\pm r$, on peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2-x_0^2}-1=0;$$

elle représente une conique ayant pour cercle principal le cercle donné et pour foyers le point M_0 ainsi que son symétrique par rapport au centre ; la conique est une ellipse ou une hyperbole suivant que M_0 est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle donné.

Si x_0 est égal à $\pm r$, l'équation devient $y^2=0$; mais l'enveloppe est formée de M_0 et du point du cercle diamétralement opposé à M_0.

---

164. — *Trouver l'enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuyent sur deux droites rectangulaires.*

Si l est la longueur de la droite, a et b les segments qu'elle détermine sur les axes, son équation est

$$f(x,y,a,b)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0,$$

avec la condition $\varphi(a,b)=a^2+b^2-l^2=0.$

D'après la méthode du n° 291, on doit éliminer a et b entre ces équations et la relation

$$\frac{-\frac{x}{a^2}}{2a}=\frac{-\frac{y}{b^2}}{2b},\qquad \text{d'où}\qquad \frac{a}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{b}{y^{\frac{1}{3}}};$$

en égalant à t les derniers rapports, portant a et b dans les deux

premières équations et éliminant ensuite t, on obtient le résultat de l'élimination sous la forme $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$; la courbe a été construite dans l'exercice 148.

---

165. — *Montrer que l'enveloppe d'une droite, telle que le produit des distances de deux points fixes à cette droite a une valeur donnée, est une conique ayant pour foyers les deux points fixes.*

Soient F et F′ les deux points fixes supposés sur Ox et d'abscisse $\pm c$; l'équation d'une droite étant écrite sous la forme

$$ux + vy + 1 = 0,$$

les distances des points F et F′ à cette droite ont pour valeurs

$$d = \frac{uc + 1}{\pm\sqrt{u^2 + v^2}}, \qquad d' = \frac{-uc + 1}{\pm\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Si l'on égale le produit $|dd'|$ à b^2, il y a deux cas à distinguer suivant que les radicaux sont pris avec le même signe ou avec des signes différents ; dans le premier cas, la relation entre u et v s'écrit

$$\frac{1 - u^2c^2}{u^2 + v^2} = b^2, \qquad u^2(c^2 + b^2) + v^2b^2 - 1 = 0$$

et dans le deuxième cas, elle s'écrit

$$\frac{-1 + u^2c^2}{u^2 + v^2} = b^2, \qquad u^2(c^2 - b^2) - v^2b^2 - 1 = 0;$$

elle ne peut alors exister pour u et v réels que si $c^2 > b^2$.

Dans le premier cas, en posant $c^2 + b^2 = a^2$, on trouve l'enveloppe en éliminant les deux paramètres u et v entre les équations

$$ux + vy + 1 = 0, \qquad a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0, \qquad \frac{x}{a^2u} = \frac{y}{b^2v};$$

en opérant comme dans le problème précédent, le résultat de l'élimination est l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ qui représente une ellipse ayant pour foyers les deux points F et F′ et pour demi-axes a et b.

Dans le second cas, on posera $c^2 - b^2 = a^2$; il suffit de changer dans ce qui précède b^2 en $-b^2$, l'enveloppe est alors une hyperbole.

---

166. — *L'enveloppe des polaires des points d'une courbe par rapport à un cercle ayant pour centre l'origine est une autre courbe qui est appelée polaire réciproque de la première par rapport au cercle; montrer que la polaire réciproque d'une conique est une autre conique et que la polaire réciproque de cette deuxième conique est identique à la première; déterminer en particulier la polaire réciproque d'une circonférence.*

Considérons en général une courbe du second ordre D appelée directrice et ayant pour équation

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

la polaire P_0 d'un point $M_0(x_0, y_0)$ par rapport à cette conique a pour équation (n° 255)

$$\frac{1}{2}(x_0F'_x + y_0F'_y + F'_z) = x_0(Ax + By + D) + y_0(Bx + Cy + E) + (Dx + Ey + F) = 0;$$

on voit qu'elle peut encore être écrite sous la forme

$$\frac{1}{2}(xF'_{x_0} + yF'_{y_0} + F'_{z_0}) = x(Ax_0 + By_0 + D) + y(Bx_0 + Cy_0 + E) + (Dx_0 + Ey_0 + F) = 0.$$

A chaque point M_0 correspond une polaire P_0; inversement, toute droite D_0 d'équation $u_0x + v_0y + w_0 = 0$ est la polaire d'un point $M_0(x_0, y_0)$ déterminé par ces conditions que les coefficients de l'équation de la polaire de M_0 soient proportionnels à ceux de la droite

$$\frac{Ax_0 + By_0 + D}{u_0} = \frac{Bx_0 + Cy_0 + E}{v_0} = \frac{Dx_0 + Ey_0 + F}{w_0}.$$

Ces équations du premier degré déterminent les coordonnées d'un point M_0 qui est appelé le pôle de la droite donnée D_0.

Supposons d'abord que M_0 décrive une ligne droite D_1 d'équation $u_1x + v_1y + w_1 = 0$; je dis que la polaire P_0 de M_0 passe constamment par un point fixe M_1 qui est précisément le pôle de la droite D_1; si en effet on a constamment $u_1x_0 + v_1y_0 + w_1 = 0$ et si l'on appelle x_1, y_1 les coordonnées du pôle de la droite D_1, satisfaisant à

$$\frac{Ax_1 + By_1 + D}{u_1} = \frac{Bx_1 + Cy_1 + E}{v_1} = \frac{Dx_1 + Ey_1 + F}{w_1},$$

on voit que l'on a constamment

$$(Ax_1 + By_1 + D)x_0 + (Bx_1 + Cy_1 + E)y_0 + (Dx_1 + Ey_1 + F) = 0,$$

et ceci montre bien que la polaire P_0 de (x_0, y_0) passe par le point $M_1(x_1, y_1)$.

Réciproquement, si une droite D_0 passe constamment par un point M_1, son pôle se trouve toujours sur la polaire P_1 de M_1; en effet, si l'on a constamment $u_0x_1 + v_0y_1 + w_0 = 0$ et si x_0, y_0 sont les coordonnées du pôle de D_0, la condition précédente s'écrit

$$(Ax_0 + By_0 + D)x_1 + (Bx_0 + Cy_0 + E)y_1 + (Dx_0 + Ey_0 + F) = 0,$$

et elle montre bien que le pôle (x_0, y_0) est sur la polaire P_1 du point M_1. Comme conséquence, le pôle de la droite joignant deux points est l'intersection des polaires de ces deux points, et la polaire du point commun à deux droites est la droite joignant les pôles de ces deux droites; ces propriétés expriment la réciprocité qui existe entre les pôles et les polaires.

Supposons maintenant que M_0 décrive une ligne C d'équation $f(x_0, y_0) = 0$; sa polaire P_0 aura une enveloppe C' dont on obtient l'équation en éliminant x_0, y_0 entre les équations

$$x_0F'_x + y_0F'_y + F'_z = 0, \qquad f(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{F'_x}{f'_{x_0}} = \frac{F'_y}{f'_{y_0}}.$$

Je dis que la ligne C' est encore le lieu des pôles des tangentes à la ligne C; en effet si l'on prend sur C deux points M_0 et M'_0 voisins l'un de l'autre, leurs polaires P_0 et P'_0 se coupent en un point M_1 qui est le pôle de $M_0M'_0$; si M'_0 se rapproche de M_0, la droite $M_0M'_0$ devient tangente à C, et son pôle, qui est à l'intersection de P_0 et P'_0 devient la limite du point M_1, c'est-à-dire le point caractéristique sur C' de la polaire de M_0.

Il résulte de là que les tangentes à la courbe C sont les polaires des points de C' et dès lors que la courbe C se déduit de C' comme C' se déduit de C. Les deux courbes C et C' sont telles que chacune est l'enveloppe des polaires des points de l'autre et en même temps le lieu des pôles des tangentes de l'autre; elles sont dites polaires réciproques. Il serait facile de le montrer directement dans des cas particuliers simples; si C est du second ordre, C' est aussi du second ordre.

Supposons que la conique directrice soit un cercle ayant pour centre l'origine et d'équation $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$; la polaire d'un point (x_0, y_0) a pour équation $xx_0 + yy_0 - R^2 = 0$. Si la courbe C est une circonférence de rayon r ayant son centre en un point d'abscisse a de l'axe Ox et si son équation est

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0,$$

on obtient sa polaire réciproque en éliminant x_0, y_0 entre les équations

$$xx_0 + yy_0 - R^2 = 0, \qquad x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 + a^2 - r^2 = 0,$$

$$\frac{F'_x}{f'_{x_0}} = \frac{F'_y}{f'_{y_0}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{x_0 - a} = \frac{y}{y_0}.$$

Le résultat de l'élimination s'écrit sous la forme

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{r^2}\left[x - \frac{R^2}{a}\right]^2;$$

cette équation représente une conique; si M est un point du lieu, MO sa distance à l'origine et MH sa distance à la droite Δ d'équation $x - \frac{R^2}{a} = 0$, l'équation précédente indique que l'on a $MO = \frac{a}{r} MH$; par suite (n°s 92, 96, 97) le lieu est une conique ayant pour foyer l'origine et pour directrice correspondante la droite Δ.

L'excentricité est égale à $\frac{a}{r}$, de sorte que la courbe est une ellipse si $a < r$, c'est-à-dire si le centre O du cercle directeur est à l'intérieur du cercle C; elle est une hyperbole si $a > r$, c'est-à-dire si O est extérieur au cercle C; enfin elle est une parabole si $a = r$, c'est-à-dire si O est sur la circonférence du cercle donné; on peut ajouter que la directrice est la polaire du centre du cercle C par rapport au cercle directeur D.

---

167. — *Déterminer l'enveloppe d'une droite représentée par l'équation*

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = \cos 2\varphi,$$

où φ *est un paramètre variable.*

L'équation et sa dérivée par rapport à φ sont

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = \cos 2\varphi, \qquad x \cos \varphi + y \sin \varphi = -2 \sin 2\varphi;$$

avant d'éliminer φ, nos résolvons ces éuquations par rapport à x et y, ce qui donne

$$x = \cos 2\varphi \sin \varphi - 2 \sin 2\varphi \cos \varphi = -3 \sin \varphi + 2 \sin^3 \varphi,$$
$$y = -\cos 2\varphi \cos \varphi - 2 \sin 2\varphi \sin \varphi = -3 \cos \varphi + 2 \cos^3 \varphi.$$

On peut étudier l'enveloppe en partant de ces équations ; il suffit de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et de prendre les symétriques de l'arc obtenu par rapport aux axes et par rapport au centre des coordonnées. Les dérivées de x et y sont

$$x'_\varphi = 6 \cos \varphi \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \varphi\right), \qquad y'_\varphi = 6 \sin \varphi \left(\frac{1}{2} - \cos^2 \varphi\right);$$

lorsque φ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le point M décrit l'arc ABC (fig. 68) présentant un point de rebroussement sur la bissectrice de l'angle des axes ; la courbe complète ABCDEFGHA présente quatre rebroussements. Si l'on évalue la longueur du segment M′M″ compté sur la droite entre les bissectrices, on constate qu'il est constant et égal à 2 ; la courbe est donc l'enveloppe d'une droite de longueur constante s'appuyant sur deux droites rectangulaires. Il est facile d'après cela, en se reportant à l'exercice 164, de former l'équation de l'enveloppe rapportée à deux axes Ox', Oy' dirigés suivant les bissectrices des axes de coordonnées, et d'en déduire son équation rapportée à ces derniers axes eux-mêmes.

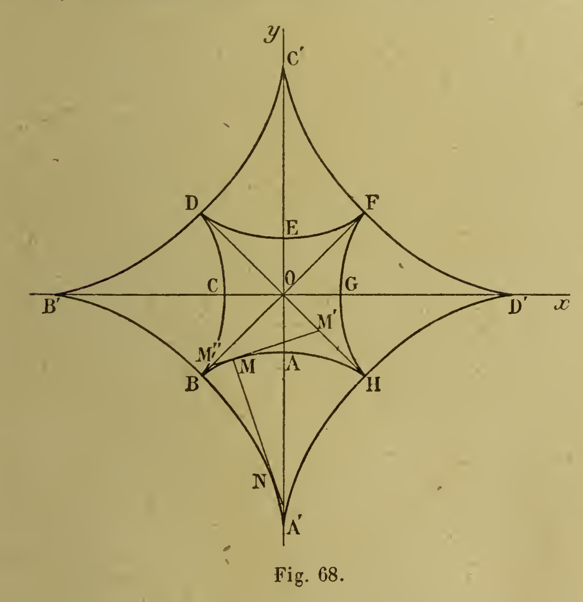


Fig. 68.

168. — *Déterminer plus généralement l'enveloppe d'une droite représentée par l'équation*

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = f(\varphi);$$

montrer que la dérivée de cette équation représente la normale à l'enveloppe au point de contact de la droite donnée; calculer les coordonnées d'un point de l'enveloppe, le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure en ce point en fonction du paramètre φ.

L'équation et sa dérivée par rapport à φ,

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = f(\varphi), \qquad x \cos \varphi + y \sin \varphi = f'(\varphi),$$

représentent deux droites rectangulaires se coupant au point caractéristique M; la première est la tangente à l'enveloppe au point M et la seconde est la normale en ce point. Si l'on cherche la développée de la courbe, il faut trouver l'enveloppe de la normale représentée par la seconde équation et y joindre la dérivée

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi = f''(\varphi);$$

celle-ci représente une perpendiculaire à la normale passant par le point caractéristique de cette dernière droite, c'est-à-dire par le centre de courbure N. En continuant de cette façon, on peut déterminer la développée de la développée, et ainsi de suite.

Par exemple dans l'exercice précédent, la développée est l'enveloppe de la droite MN représentée par la deuxième équation; on peut constater que le segment de cette droite compris entre les points où elle coupe les axes de coordonnées est encore constant; la développée est donc semblable à la courbe et elle a la forme A'B'C'D'A'.

Les coordonnées d'un point M de l'enveloppe sont

$$x = f(\varphi) \sin \varphi + f'(\varphi) \cos \varphi, \qquad y = -f(\varphi) \cos \varphi + f'(\varphi) \sin \varphi;$$

celles du point correspondant N de la développée sont

$$x_1 = f'(\varphi) \cos \varphi - f''(\varphi) \sin \varphi, \qquad y_1 = f'(\varphi) \sin \varphi + f''(\varphi) \cos \varphi;$$

enfin le rayon de courbure est

$$R = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} = \pm [f(\varphi) + f''(\varphi)].$$

---

169. — *On considère sur une courbe donnée un certain sens de parcours, et l'on compte les arcs de la courbe positivement s'ils sont décrits dans ce sens, négativement s'ils sont décrits dans le sens opposé; en un point de la courbe, de coordonnées x, y, on mène la demi-tangente dans le sens choisi et l'on désigne par α l'angle qu'elle fait avec Ox; montrer que les différentielles de x et y sont toujours liées à la différentielle de l'arc par les formules*

$$dx = ds \cos \alpha, \qquad dy = ds \sin \alpha.$$

Soient M un point d'une courbe, MD une demi-droite issue de ce point et voisine de la demi-tangente considérée dans l'énoncé, α_1 l'angle voisin de α que fait cette demi-droite avec l'axe Ox et M' le point voisin de M où elle coupe de nouveau la courbe; le segment $MM' = \Delta l$ a une valeur algébrique de même signe que l'arc $MM' = \Delta s$, et l'on a en grandeur et en signe $\lim \frac{\Delta l}{\Delta s} = 1$.

Les projections Δx et Δy du vecteur Δl sont, dans tous les cas, égales à

$$\Delta x = \Delta l \cos \alpha_1, \qquad \Delta y = \Delta l \sin \alpha_1;$$

on a par suite

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{\Delta l}{\Delta s} \cos \alpha_1, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\Delta l}{\Delta s} \sin \alpha_1.$$

En passant à la limite, lorsque MD devient la tangente en M, α_1 devient égal à α, et l'on obtient les relations

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha.$$

---

170. — *Déterminer les coordonnées du centre de courbure et le rayon de courbure en un point d'une ellipse en fonction des coordonnées de ce point ou en fonction du paramètre angulaire φ; examiner le cas particulier où le point donné est l'un des sommets de la courbe; montrer que si* A *et* B *sont les sommets de l'ellipse situés sur* Ox *et* Oy, *et* C *le dernier sommet du rectangle construit sur* OA *et* OB, *la perpendiculaire abaissée de* C *sur* AB *rencontre les axes aux centres de courbure relatifs aux points* A *et* B.

Supposons que l'on considère y comme une fonction de x fournie par l'équation de l'ellipse écrite sous la forme habituelle; les dérivées de la fonction seront données par les relations

$$\frac{x}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0, \qquad \frac{1}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{yy''}{b^2}=0;$$

on en déduit

$$y'=\frac{-b^2x}{a^2y}, \qquad y''=\frac{-b^4}{a^2y^3}.$$

Les formules (7) du n° 292 donnent, tous calculs faits,

$$X-x=\frac{-x(b^4x^2+a^4y^2)}{a^4b^2}, \qquad Y-y=\frac{-y(b^4x^2+a^4y^2)}{a^2b^4},$$

$$R=\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Nous avons déterminé au n° 294 le centre et le rayon de courbure en fonction du paramètre φ et nous avons construit la développée.

Les rayons de courbure aux sommets sont $R_A=\frac{b^2}{a}$, $R_B=\frac{a^2}{b}$, et la construction indiquée dans l'énoncé donne bien le centre de courbure correspondant.

---

171. — *Déterminer le centre et le rayon de courbure en un point d'une parabole; montrer que le rayon de courbure est égal à* $\frac{N^3}{p^2}$, N *désignant la longueur de la normale au point considéré comptée jusqu'à l'axe et* p *le paramètre de la courbe; déterminer la développée de la parabole.*

Si l'on veut considérer y comme fonction de x, il y a avantage à placer l'axe de la parabole suivant Oy et à prendre son équation sous la forme $y=\frac{x^2}{2p}$.

Si l'on veut conserver l'équation de la courbe sous la forme $y^2-2px=0$, il vaut mieux alors considérer x comme fonction de y égale à $\frac{y^2}{2p}$, et employer les formules

$$X-x=\frac{1+x'^2}{x''}, \qquad Y-y=\frac{-x'(1+x'^2)}{x''}, \qquad R=\pm\frac{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}{x''},$$

on trouve ainsi

$$X = p + \frac{3y^2}{2p}, \qquad Y = \frac{-y^3}{p^2}, \qquad R = \frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Comme la longueur de la portion MN de la normale (fig. 69) est $N = \sqrt{y^2 + p^2}$, on voit bien que l'on a

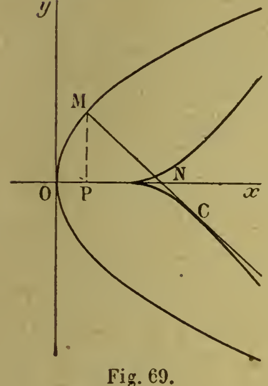


Fig. 69.

$$R = \frac{N^3}{p^2}.$$

On peut construire la développée en considérant X et Y comme dépendant du paramètre y, ou bien en éliminant y entre les deux équations fournissant X et Y ; on trouve ainsi $Y^2 = \frac{8}{27p}(X-p)^3$; la courbe a la forme indiquée dans la figure, elle a un point de rebroussement d'abscisse p. On peut rapprocher ces résultats de ceux de l'exercice 144.

---

172. — *Quelle est la caustique par réflexion d'une parabole pour les rayons parallèles à l'axe? pour les rayons perpendiculaires à l'axe?*

Fig. 70.

Si la tangente en un point M de la parabole (fig. 70) fait avec l'axe Ox un angle α, la droite MR symétrique par rapport à la normale MN d'un rayon MI parallèle à l'axe fait avec Ox l'angle $\pi + 2\alpha$; comme on a $\operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{p}{y}$, l'équation de MR est

$$Y - y = \operatorname{tg} 2\alpha (X - x) = \frac{2py}{y^2 - p^2}\left(X - \frac{y^2}{2p}\right);$$

en l'écrivant

$$Y = \frac{2py}{y^2 - p^2}\left(X - \frac{p}{2}\right),$$

on voit que cette droite passe constamment par le foyer F, qui est l'enveloppe des rayons réfléchis.

Si l'on considère un rayon incident MI′ normal à l'axe, le rayon réfléchi MR′ fait avec Ox un angle égal à $\frac{\pi}{2}+2\alpha$ et a pour équation

$$Y-y=-\cot g\, 2\alpha(X-x), \quad \text{d'où} \quad Y=-\frac{y^2-p^2}{2py}X+\frac{y^3+3p^2y}{4p^2}.$$

Cette équation et sa dérivée par rapport à y peuvent être résolues par rapport à X et Y et donnent $X=\frac{3y^2}{2p}$, $Y=\frac{3y}{2}-\frac{y^3}{2p^2}$.

On peut construire l'enveloppe en partant de ces expressions ou bien éliminer y, ce qui donne l'équation

$$Y^2=\frac{2X}{27p}\left(X-\frac{9p}{2}\right)^2;$$

la courbe a la forme de la figure 70; elle présente un point double au point d'abscisse $\frac{9p}{2}$.

---

173. — *Étant donnée une courbe* C *et un point lumineux* L, *on considère le rayon réfléchi ayant pour point d'incidence un point* M *de la courbe; soit* Q *le symétrique du point* L *par rapport à la tangente en* M *à la courbe* C *et soit* C′ *le lieu du point* Q *lorsque* M *varie; montrer que le rayon réfléchi en* M *est normal au point* Q *à la courbe* C′. *Pour simplifier le raisonnement, on pourra supposer le point* L *à l'origine et la courbe* C *définie comme l'enveloppe d'une droite représentée par l'équation de l'exercice* 168; *il résulte de là que la caustique par réflexion de la courbe* C *pour les rayons issus de* L *est la développée de la courbe* C′.

Représentons les tangentes à la courbe C (fig. 71) par l'équation

$$x \sin\varphi - y\cos\varphi = f(\varphi),$$

où φ est un paramètre variable; les coordonnées du point M de contact sont, d'après la solution de l'exercice 168,

$$x_1 = f\sin\varphi + f'\cos\varphi, \qquad y_1 = -f\cos\varphi + f'\sin\varphi;$$

celles du pied P de la perpendiculaire abaissée de L sur la tangente

sont $x_2 = f \sin\varphi$, $y_2 = -f\cos\varphi$, et celles du symétrique Q de L par rapport à la tangente sont

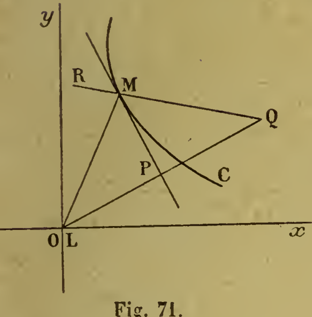


Fig. 71.

$$X = 2f\sin\varphi, \qquad Y = -2f\cos\varphi.$$

Le coefficient angulaire de la normale au point Q, à la courbe lieu de ce point, a pour valeur

$$-\frac{dX}{dY} = -\frac{X'}{Y'} = \frac{-f'\sin\varphi - f\cos\varphi}{-f'\cos\varphi + f\sin\varphi};$$

il est bien égal à celui de la droite QM, c'est-à-dire à $\dfrac{Y-y_1}{X-x_1}$.

On voit donc que la caustique enveloppe du rayon réfléchi MR est la développée de la courbe lieu de Q ; cette dernière courbe est l'homothétique par rapport au point L, avec le rapport 2, de la podaire de la courbe C par rapport à ce point L.

---

174. — *Déterminer la développée de la chaînette.*

Les formules (7) du n° 292 appliquées à la chaînette d'équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

donnent

$$X - x = -\frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}}\right), \qquad Y - y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = y,$$

$$R = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = \frac{y^2}{a};$$

on voit en particulier que $Y = 2y$, de sorte que le centre de courbure est symétrique, par rapport au point de la courbe, du point de rencontre de la normale avec Ox ; cela résulte aussi de la valeur du rayon de courbure qui est ici égal à $y\sqrt{1+y'^2}$. Il est facile d'après cela de construire la développée, qui présente le même aspect que la développée d'une parabole.

---

175. — *Déterminer la tangente et la normale en un point d'une cycloïde; montrer que la normale passe par le point de contact du cercle générateur avec la base de la courbe; déterminer le centre et le rayon de courbure en un point de la cycloïde, ainsi que la développée de cette courbe; montrer que cette développée est une cycloïde égale à la première.*

En un point de la cycloïde représentée par les équations

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t),$$

le coefficient angulaire de la tangente est égal à

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{cotg} \frac{t}{2};$$

la tangente fait donc avec l'axe des x un angle α égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ à un multiple près de π. Si l'on remarque que le même angle est fait avec Ox par la corde joignant le point M au point B du cercle générateur diamétralement opposé au point de contact A (fig. 72), on voit que la tangente à la cycloïde est identique à MB; la normale est donc MA.

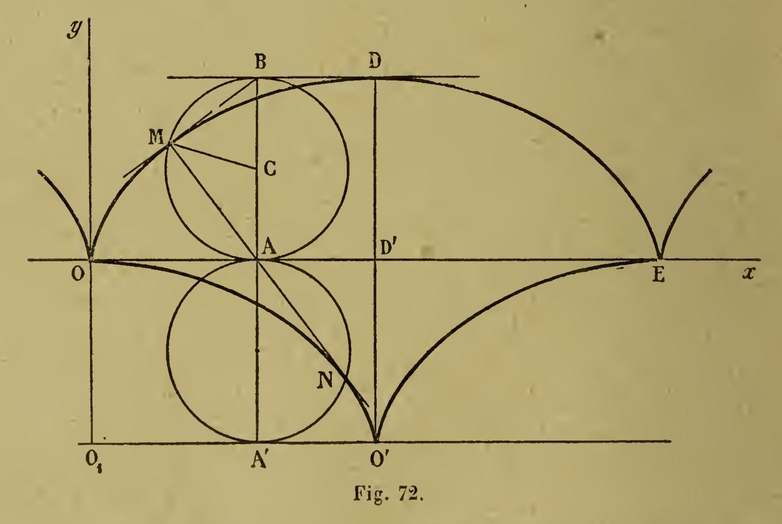


Fig. 72.

On peut calculer les coordonnées du centre de courbure et le rayon d'après les formules (3) et (4) ou bien (5) et (6) du n° 292; on trouverait en particulier $Y = -y$; on arrive plus facilement au résul-

tat en remarquant que le rayon de courbure est $\rho = \frac{ds}{d\alpha}$; comme on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} dt^2, \qquad ds = 2a \sin \frac{t}{2} dt,$$

et que $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$, $d\alpha = \frac{-dt}{2}$, on voit que $\rho = -2a \sin \frac{t}{2}$, de sorte que le rayon de courbure est égal au double de MA et le centre de courbure est le point N symétrique de M par rapport à A.

La développée, lieu des points N, se compose d'arcs de cycloïde égaux à ceux de la cycloïde donnée. Pour le voir, considérons une droite O_1O', parallèle à Ox, d'ordonnée $-2a$; prenons $O_1O' = \pi a$, et faisons rouler sur la droite O_1O' un cercle de rayon a; un point N_1, d'abord confondu avec O', décrira une cycloïde égale à la première et il suffit de démontrer que ce point N_1 vient se confondre avec le centre de courbure N au point M. Si l'on considère la position du nouveau cercle lorsqu'il est tangent à Ox au point A, le point N est sur ce nouveau cercle et il est tel que arc AN $=$ arc AM $=$ OA, donc arc $A'N = \pi a - OA = A'O'$, et les points N et N_1 sont alors confondus, ce qui démontre la proposition. La développée de l'arc OE de la première cycloïde se compose de deux arcs ONO', $O'E$ de la seconde.

---

176. — *Soit* AM *un arc d'une circonférence, ayant pour origine un point fixe* A *et pour extrémité un point variable* M *de cette courbe; sur la tangente en* M *et dans le sens* MA, *on porte une longueur* MP *égale à l'arc* MA; *le lieu du point* P, *lorsque* M *varie, s'appelle développante de cercle; en supposant que l'origine des coordonnées soit le centre de la circonférence et que l'axe des* x *passe par* A, *exprimer en fonction de l'arc* AM *les coordonnées du point* P; *montrer que le point* M *est le centre de courbure de la développante au point* P.

Si R est le rayon du cercle et θ l'angle AOM (fig. 73), le vecteur MP est égal à $R\theta$ et fait avec Ox un angle égal à $\theta - \frac{\pi}{2}$; en proje-

tant sur les axes de coordonnées le contour OMP, on obtient les expressions des coordonnées du point P :

$$x = R\cos\theta + R\theta\sin\theta, \qquad y = R\sin\theta - R\theta\cos\theta.$$

La courbe décrite par P a pour développée le cercle donné ; on a en effet

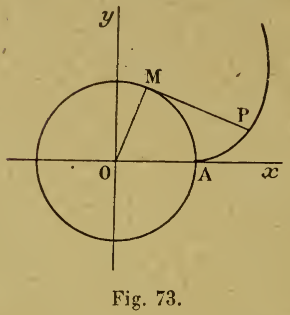


Fig. 73.

$$dx = R\theta\cos\theta\, d\theta, \qquad dy = R\theta\sin\theta\, d\theta,$$

de sorte que le coefficient angulaire de la tangente en P est $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta$, et la tangente est parallèle à OM, donc la normale est dirigée suivant PM. Le rayon de courbure est égal à $\rho = \frac{ds}{d\alpha}$; comme on a $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = R\theta d\theta$, et $\alpha = \theta$, d'où $d\alpha = d\theta$, on voit que $\rho = R\theta = PM$ et le centre de courbure de la développante au point P n'est autre que le point M.

---

177. — *Déterminer le rayon de courbure en un point de la spirale logarithmique.*

Soit $\rho = \rho_0 e^{m\theta}$ l'équation de la spirale logarithmique ; la tangente en un point M fait avec le rayon vecteur un angle constant V tel que $\operatorname{tg} V = \frac{1}{m}$ (n° 256), l'angle qu'elle fait avec Ox est $\alpha = \theta + V$.

On peut calculer le rayon de courbure R par la formule du n° 220, mais il est plus facile de remarquer qu'il est égal à $\frac{ds}{d\alpha}$; ici on a

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2} = \rho\sqrt{1 + m^2}\, d\theta = \frac{\rho d\theta}{\sin V}, \qquad d\alpha = d\theta ;$$

on en déduit $R = \frac{\rho}{\sin V} = \rho\sqrt{1 + m^2}$.

Si l'on construit un triangle OMN rectangle en O, dont l'hypoténuse est dirigée suivant la normale, la longueur MN de cette hypoténuse est précisément égale à R (fig. 74).

La développée est le lieu du point N extrémité de la sous-normale ; ce lieu est une spirale logarithmique, car on a $ON = \rho \cot V = \rho m$, et entre les coordonnées ρ', θ' du point N existe la relation

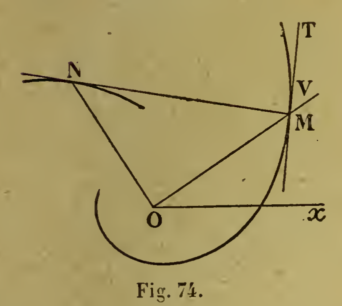


Fig. 74.

$$\rho' = \rho_0 m e^{m\theta} = \left(\rho_0 m e^{-m\frac{\pi}{2}}\right) e^{m\theta'}.$$

La deuxième spirale, lieu du point N, est égale à la première qu'on aurait fait tourner d'un certain angle autour du pôle, car on peut écrire $\rho' = \rho_0 e^{m(\theta' - \theta_1)}$, θ_1 étant un angle convenablement choisi.

---

178. — *Démontrer que la circonférence tangente en un point* M *d'une courbe à la tangente* MT *en ce point, et passant par un point voisin* M′ *de la courbe, a pour limite le cercle de courbure au point* M *lorsque le point* M′ *se rapproche indéfiniment du point* M ; *déduire de là que le rayon de courbure en* M *est la limite du rapport* $\frac{\overline{MM'}^2}{2M'P}$, M′P *étant la distance du point* M′ *à la tangente* MT.

Si l'on prend comme origine le point M et comme axe des x la tangente MT en ce point (fig. 75), le coefficient angulaire de la tangente à l'origine est égal à 0; le rayon de courbure a alors pour valeur $\frac{1}{y''_0}$. Si l'on développe la fonction y suivant la formule de Maclaurin (n° 163), on a

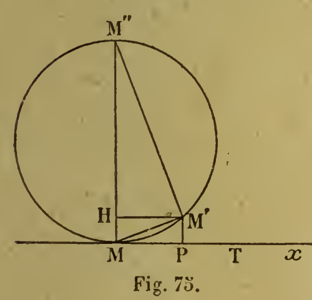


Fig. 75.

$$y = y''_0 \frac{x^2}{2} + y'''_0 \frac{x^3}{6} + \cdots\cdots$$

Soit R le rayon d'un cercle passant par l'origine et tangent à l'axe Ox, son équation est

$$X^2 + Y^2 - 2RY = 0;$$

s'il est assujetti à passer par un point voisin $M'(x, y)$, R est déterminé par l'équation

$$R = \frac{x^2 + y^2}{2y} = \frac{x^2 + y_0''^2 \frac{x^4}{4} + \cdots}{y_0'' x^2 + y_0''' \frac{x^3}{3} + \cdots} = \frac{1}{y_0''} - \frac{y_0'''}{3y_0''^2} x + \cdots ;$$

lorsque le point M' tend vers M, x tend vers 0 et R vers $\frac{1}{y_0''}$, c'est-à-dire vers ρ ; la proposition est ainsi démontrée.

On voit géométriquement, en joignant le point M' du cercle au point M'' diamétralement opposé à M, que l'on a $\overline{MM'}^2 = 2R \times \overline{MH}$, par suite $\rho = \lim \frac{\overline{MM'}^2}{2M'P}$.

---

179. — *On considère la courbe gauche définie par les équations*

$$x = e^{m\theta} \cos \theta, \qquad y = e^{m\theta} \sin \theta, \qquad z = e^{m\theta} \operatorname{cotg} \varphi,$$

où θ est un paramètre variable, φ un angle constant; déterminer la tangente en un point; montrer que la courbe est située sur un cône de révolution ayant pour sommet l'origine et pour axe Oz, et que la tangente en chaque point fait un angle constant avec la génératrice du cône passant par ce point.

Entre x, y et z existe la relation $x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = 0$ qui représente un cône de révolution d'axe Oz ; ce cône renferme la courbe. Les paramètres directeurs de la tangente en un point sont

$$x'_\theta = e^{m\theta}(m \cos \theta - \sin \theta), \qquad y'_\theta = e^{m\theta}(m \sin \theta + \cos \theta),$$
$$z'_\theta = e^{m\theta} m \operatorname{cotg} \varphi,$$

ceux de la génératrice sont x, y, z ; l'angle de ces deux droites est donné par

$$\cos V = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{m\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \varphi}}{\sqrt{1 + m^2 + m^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi}}$$

et il est constant. On peut encore remarquer que l'angle de la tangente avec Oz est aussi constant et tel que l'on ait

$$\cos \gamma = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{m \operatorname{cotg} \varphi}{\sqrt{1 + m^2 + m^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi}}.$$

La projection de la courbe sur le plan xOy est la spirale logarithmique d'équation $\rho = e^{m\theta}$; la courbe donnée est tracée sur un cylindre ayant pour base cette spirale et ayant ses génératrices parallèles à Oz. Sur ce cylindre, elle fait en chaque point un angle constant avec la génératrice qui passe par ce point ; elle est donc une hélice de ce cylindre.

---

180. — *On appelle hélicoïde à plan directeur la surface représentée par l'équation*

$$z = m \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x};$$

montrer que c'est une surface réglée dont les génératrices s'appuient sur l'axe des z et lui sont perpendiculaires et que sa section par un cylindre de révolution d'axe Oz est une hélice; déterminer l'équation du plan tangent en un point de la surface.

Un plan parallèle au plan xOy, de cote $z = h$, coupe la surface suivant une droite d'équation $y = x \operatorname{tg} \frac{h}{m}$; cette droite reste perpendiculaire à Oz et l'angle qu'elle fait avec Ox est proportionnel à h.

La section de la surface par un cylindre de rayon R peut être définie en coordonnées semi-polaires par les équations

$$x = R \cos \theta, \qquad y = R \sin \theta, \qquad z = m\theta;$$

elle est bien une hélice dont le pas est égal à $2\pi m$ quel que soit R.

Le plan tangent en un point de la surface représentée par

$$f(x, y, z) = z - m \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = 0$$

est, d'après l'équation (5) du n° 298,

$$\frac{m}{x^2 + y^2}(Xy - Yx) + Z - z = 0;$$

on voit qu'il est coupé par le plan $Z = z$ suivant la génératrice contenue dans ce plan ; il est déterminé par cette génératrice et par la tangente à l'hélice passant par le point donné et située sur la surface.

---

181. — *On considère la courbe représentée par les équations*

$$x = \frac{a^2 x_0}{a^2 + \lambda}, \qquad y = \frac{b^2 y_0}{b^2 + \lambda}, \qquad z = \frac{c^2 z_0}{c^2 + \lambda},$$

où λ *est un paramètre variable; déterminer et construire ses projections sur les trois plans de coordonnées; montrer que cette courbe est du troisième ordre, ou, comme on dit, une cubique gauche, et qu'elle passe par les pieds des normales abaissées du point* (x_0, y_0, z_0) *sur l'ellipsoïde dont l'équation est* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

Le nombre des points communs à la courbe et à un plan quelconque d'équation $Ax + By + Cz + D = 0$ est égal au nombre des racines de l'équation

$$\frac{Aa^2x_0}{a^2+\lambda} + \frac{Bb^2y_0}{b^2+\lambda} + \frac{Cc^2z_0}{c^2+\lambda} + D = 0,$$

où λ est l'inconnue, et cette équation, rendue entière, est toujours du troisième degré, par suite la courbe est du troisième ordre (n° 105).

Aux valeurs particulières $\lambda_1 = -a^2$, $\lambda_2 = -b^2$, $\lambda_3 = -c^2$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = \infty$ correspondent les points :

1° $\quad x_1 = \infty, \quad y_1 = \frac{b^2 y_0}{b^2 - a^2}, \quad z_1 = \frac{c^2 z_0}{c^2 - a^2};$

2° $\quad x_2 = \frac{a^2 x_0}{a^2 - b^2}, \quad y_2 = \infty, \quad z_2 = \frac{c^2 z_0}{c^2 - b^2};$

3° $\quad x_3 = \frac{a^2 x_0}{a^2 - c^2}, \quad y_3 = \frac{b^2 y_0}{b^2 - c^2}, \quad z_3 = \infty;$

4° $\quad x_4 = x_0, \quad y_4 = y_0, \quad z_4 = z_0;$

5° $\quad x_5 = 0, \quad y_5 = 0, \quad z_5 = 0;$

on en conclut que la courbe passe par l'origine et par le point (x_0, y_0, z_0) et possède trois asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.

La projection de la courbe sur le plan xOy est fournie par les équations qui donnent x et y; l'élimination de λ entre ces deux équations conduit à l'équation de la projection

$$(a^2 - b^2)xy + b^2 y_0 x - a^2 x_0 y = 0;$$

elle représente une hyperbole équilatère passant par l'origine et ayant

des asymptotes parallèles aux axes, elle est du reste l'hyperbole d'Apollonius (exercice 145) relative au point (x_0, y_0) pour l'ellipse de demi-axes a et b. Les projections de la cubique sur les autres plans de coordonnées sont analogues.

Si l'on veut déterminer les normales à l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ passant par un point (x_0, y_0, z_0), on calcule les coordonnées x, y, z du pied d'une normale (n° 300) au moyen des équations

$$\frac{x_0-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{y_0-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{z_0-z}{\frac{z}{c^2}}$$

jointes à celles de la surface. Les premières, où l'on considère x, y, z comme coordonnées courantes, représentent une courbe C ; en égalant à λ la valeur commune des rapports, on trouve précisément

$$x=\frac{a^2x_0}{a^2+\lambda}, \qquad y=\frac{b^2y_0}{b^2+\lambda}, \qquad z=\frac{c^2z_0}{c^2+\lambda},$$

de sorte que la courbe C est identique à la cubique étudiée précédemment. Elle rencontre l'ellipsoïde en six points réels ou imaginaires correspondant aux six racines de l'équation en λ

$$\frac{a^2x_0^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{b^2y_0^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{c^2z_0^2}{(c^2+\lambda)^2}-1=0,$$

de sorte que l'on peut mener d'un point six normales réelles ou imaginaires à un ellipsoïde.

---

182. — *Montrer que l'équation*

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right) - \left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1\right)^2=0$$

représente le cône ayant pour sommet le point (x_0, y_0, z_0) *et circonscrit à l'ellipsoïde précédent.*

Il suffit de répéter le raisonnement de l'exercice 140. Si X, Y, Z

sont les coordonnées d'un point quelconque d'une tangente à l'ellipsoïde issue de (x_0, y_0, z_0), x, y, z celles du point de contact, on a

$$x = \frac{X + \lambda x_0}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{Y + \lambda y_0}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{Z + \lambda z_0}{1 + \lambda}.$$

En écrivant que le point (x, y, z) est situé sur l'ellipsoïde et aussi sur le plan polaire de (x_0, y_0, z_0), on voit que x, y, z doivent satisfaire aux deux équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0;$$

en remplaçant x, y, z par leurs valeurs et en éliminant λ, on a l'équation du lieu des tangentes

$$\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right) - \left(\frac{Xx_0}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} + \frac{Zz_0}{c^2} - 1\right)^2 = 0.$$

Elle ne diffère de celle de l'énoncé que par le changement de X, Y, Z en x, y, z.

On démontre de la même manière que si la surface du second ordre est représentée en général par $f(x, y, z) = 0$, l'équation du cône circonscrit de sommet (x_0, y_0, z_0) est

$$4f(X, Y, Z)f(x_0, y_0, z_0) - (x_0 f'_X + y_0 f'_Y + z_0 f'_Z + f'_T)^2 = 0.$$

---

183. — *L'équation*

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1 = 0$$

représente, lorsque λ varie, une famille de surfaces du second ordre, que l'on appelle homofocales ; démontrer que par un point (x_0, y_0, z_0) passent trois de ces surfaces et qu'elles sont l'une un ellipsoïde, une autre un hyperboloïde à une nappe et la troisième un hyperboloïde à deux nappes ; démontrer que deux quelconques de ces trois surfaces se coupent orthogonalement en tous leurs points communs.

Il suffit de répéter les raisonnements de l'exercice 142. Les valeurs

de λ correspondant aux surfaces passant par un point (x_0, y_0, z_0) sont les racines de l'équation

$$F(\lambda)=\frac{x_0^2}{a^2-\lambda}+\frac{y_0^2}{b^2-\lambda}+\frac{z_0^2}{c^2-\lambda}-1=0;$$

en supposant $a^2>b^2>c^2$, les signes des résultats de substitution dans le premier membre sont donnés par le tableau

λ	$-\infty$	$c^2-\varepsilon$	$c^2+\varepsilon$	$b^2-\varepsilon$	$b^2+\varepsilon$	$a^2-\varepsilon$	$a^2+\varepsilon$	$+\infty$
$F(\lambda)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$

On en conclut que l'équation a ses racines réelles, l'une λ' inférieure à c^2, il lui correspond un ellipsoïde; une autre λ'' comprise entre c^2 et b^2, il lui correspond un hyperboloïde à une nappe, et la troisième λ''' comprise entre b^2 et a^2, il lui correspond un hyperboloïde à deux nappes.

Le plan tangent en un point (x_0, y_0, z_0) à l'une de ces surfaces a pour équation

$$\frac{Xx_0}{a^2-\lambda}+\frac{Yy_0}{b^2-\lambda}+\frac{Zz_0}{c^2-\lambda}-1=0;$$

si (x_0, y_0, z_0) est un point commun aux deux surfaces correspondant à λ' et λ'', la condition pour que les plans tangents à ces surfaces en ce point soient orthogonaux est

$$\frac{x_0^2}{(a^2-\lambda')(a^2-\lambda'')}+\frac{y_0^2}{(b^2-\lambda')(b^2-\lambda'')}+\frac{z_0^2}{(c^2-\lambda')(c^2-\lambda'')}=0;$$

cette condition est satisfaite, car elle est identique à

$$\frac{F(\lambda')-F(\lambda'')}{\lambda'-\lambda''}=0.$$

En écrivant que l'on a identiquement

$$F(\lambda)(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)=(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda'')(\lambda-\lambda''')$$

et divisant les deux membres de cette équation par $(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)$, puis faisant $\lambda=a^2$, on trouve x_0^2, de même y_0^2 et z_0^2 sous la forme

$$x_0^2=\frac{(a^2-\lambda')(a^2-\lambda'')(a^2-\lambda''')}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},\qquad y_0^2=\frac{(b^2-\lambda')(b^2-\lambda'')(b^2-\lambda''')}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)},$$

$$z_0^2=\frac{(c^2-\lambda')(c^2-\lambda'')(c^2-\lambda''')}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

Les trois nombres λ', λ'', λ''' sont appelés cordonnées elliptiques du point (x_0, y_0, z_0), ainsi que de ceux qui s'en déduisent par symétrie par rapport aux plans de coordonnées.

---

184. — *Le lieu des perpendiculaires menées par le sommet d'un cône aux plans tangents à ce cône s'appelle cône supplémentaire du premier; déterminer le cône supplémentaire du cône représenté par l'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,;$$

montrer que le cône supplémentaire du cône ainsi obtenu est identique au premier.

Les équations de la perpendiculaire menée par l'origine au plan tangent représenté par

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} - \frac{Zz}{c^2} = 0$$

sont

$$\frac{X}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{Z}{\frac{-z}{c^2}}\,;$$

l'élimination de x, y, z conduit à l'équation

$$a^2X^2 + b^2Y^2 - c^2Z^2 = 0$$

qui représente le cône supplémentaire du premier; le même calcul appliqué au second cône montre qu'il a pour supplémentaire précisément le premier cône.

---

185. — *Démontrer que l'équation* $f + \lambda\varphi = 0$, *où* f *et* φ *sont des fonctions entières du second degré de trois variables* x, y, z, *et* λ *un paramètre, représente une quadrique* S'' *passant par la courbe d'intersection des quadriques* S *et* S' *représentées par* $f = 0$, $\varphi = 0$. *Si* φ *est décomposable en un produit de deux facteurs, c'est-à-dire si* S' *se décompose en deux plans, démontrer que les quadriques* S

et S'' *sont tangentes l'une à l'autre aux points de rencontre de* S *et de la droite d'intersection de ces deux plans; les surfaces* S *et* S'' *sont dites alors bitangentes. Si* φ *est le carré d'une fonction linéaire, c'est-à-dire si* S' *se réduit à un plan double, démontrer que* S *et* S'' *sont tangentes en tous les points de rencontre de* S *et de ce plan; les surfaces sont alors dites circonscrites le long de ce plan; déduire de là que l'équation d'une quadrique circonscrite à* S *est de la forme* $f + \lambda P^2 = 0$.

Les coordonnées de tous les points communs aux deux surfaces S et S' annulent f et φ et satisfont quel que soit λ à l'équation $f + \lambda\varphi = 0$; celle-ci représente une surface S'' du second ordre passant par la ligne d'intersection de S et S'.

Si φ est égal au produit de deux facteurs du premier degré, PQ, tels que

$$P = ax + by + cz + d, \qquad Q = a'x + b'y + c'z + d',$$

les quadriques S et S'' ont en commun les sections de S par les plans $P = 0$ et $Q = 0$. L'équation du plan tangent en un point de S'' est

$$(X - x)[f'_x + \lambda(aQ + a'P)] + (Y - y)[f'_y + \lambda(bQ + b'P)] + (Z - z)[f'_z + \lambda(cQ + c'P)] = 0;$$

si ce point appartient de plus aux plans $P = 0$ et $Q = 0$, l'équation du plan est la même que celle du plan tangent à S; les surfaces S et S'' ont donc même plan tangent aux points d'intersection de S et de la ligne commune aux deux plans.

Si P et Q sont identiques, l'équation de S'' devient $f + \lambda P^2 = 0$ et les surfaces S et S'' ont même plan tangent en tous les points de la courbe commune qu'elles possèdent dans le plan $P = 0$; les deux surfaces sont circonscrites le long de cette courbe.

Les réciproques sont les suivantes : 1° si deux surfaces du second ordre ont les mêmes plans tangents en deux points communs H et K, ces plans tangents ne passant pas par la droite HK, elles ont en commun deux courbes planes dont les plans passent par HK. On peut faire la démonstration en prenant le point H comme origine et la droite HK comme axe des z; si h est la cote du point K, l'équation d'une des surfaces est de la forme

$$S = z^2 + (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + z(ax + by) + cx + dy - hz = 0;$$

l'équation d'une autre surface S'' passant par les mêmes points H et K est de la même forme; en écrivant que les plans tangents aux points H et K sont les mêmes pour la deuxième surface et pour la première, on trouve que l'équation de S'' est de la forme

$$S'' = z^2 + (A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2) + z(ax + by) + cx + dy - hz = 0,$$

les seuls coefficients différant dans les équations étant ceux de x^2, xy et y^2. Dès lors, on a

$$S'' - S = (A_1 - A)x^2 + 2(B_1 - B)xy + (C_1 - C)y^2,$$

et comme le second membre est homogène, il est décomposable en un produit de deux facteurs du premier degré PQ; ces facteurs, égalés à zéro, représentent des plans passant par Oz. On a donc $S'' = S + \lambda PQ$, et les deux surfaces ont en commun deux courbes planes dont les plans passent par HK.

2° Si deux surfaces ont mêmes plans tangents en trois points H, K, L non en ligne droite, chacun de ces plans tangents ne passant pas par deux sommets du triangle HKL, ces surfaces ont en commun une courbe plane dans le plan HKL et sont circonscrites tout le long de cette courbe plane.

En effet, d'après ce qui précède, on aura $S'' = S + \lambda PQ$, où $P = 0$ et $Q = 0$ représentent deux plans; mais ces plans doivent passer à la fois par HK, KL et HL; ils sont confondus avec le plan HKL et on aura $S'' = S + \lambda P^2$; les deux surfaces sont bien circonscrites le long d'une courbe contenue dans le plan des trois points.

---

186. — *Une quadrique est circonscrite à une sphère le long d'un plan* P; *démontrer que toute section plane de cette quadrique par un plan tangent à la sphère est une conique ayant pour foyer le point de contact du plan et de la sphère, et pour directrice la droite d'intersection du plan sécant et du plan* P *de contact de la sphère et de la quadrique.*

Dans le cas où la quadrique est un cône de révolution, on retrouve le théorème de Dandelin sur les sections planes de ce cône.

Prenons pour origine le point de contact du plan tangent à la sphère et pour axe Oz le rayon correspondant; l'équation de la sphère sera

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0.$$

Si une quadrique lui est circonscrite le long d'un cercle tracé dans un plan P d'équation $P = Ax + By + Cz + D = 0$, nous pourrons écrire l'équation de cette quadrique sous la forme

$$S'' = S - \lambda P^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz - \lambda(Ax + By + Cz + D)^2 = 0;$$

sa section par le plan tangent à la sphère $z = 0$ est représentée par l'équation $x^2 + y^2 - \lambda(Ax + By + D)^2 = 0$; en l'écrivant

$$x^2 + y^2 = \lambda(A^2 + B^2)\left[\frac{Ax + By + D}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right]^2,$$

on voit qu'elle exprime la propriété suivante: le carré de la distance d'un point de la courbe à l'origine est dans un rapport constant $\lambda(A^2 + B^2)$ avec le carré de la distance du même point à la droite d'équation $Ax + By + D = 0$; on en conclut que la courbe est une conique ayant pour foyer l'origine et pour directrice la droite précédente, c'est-à-dire l'intersection du plan tangent avec le plan de contact de la sphère et de la quadrique.

---

187. — *Démontrer qu'un hyperboloïde à une nappe est coupé par un plan tangent à son cône asymptote suivant deux droites parallèles à la génératrice de contact du plan avec le cône.*

Un hyperboloïde à une nappe et son cône asymptote sont représentés par les équations

$$H(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$C(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

En raisonnant comme au n° 126, on voit que le cône est le lieu des droites représentées par les équations

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\sin\varphi, \qquad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\cos\varphi;$$

le plan tangent au cône en un point (x, y, z) situé sur une de ces droites a pour équation

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}-\frac{Zz}{c^2}=0,$$

ou, en remplaçant x et y par leurs valeurs en fonction de z,

$$\frac{X}{a}\sin\varphi-\frac{Y}{b}\cos\varphi-\frac{Z}{c}=0.$$

En joignant à cette équation celle de l'hyperboloïde écrite sous la forme

$$H(X, Y, Z)=\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}-1=0,$$

on a deux équations représentant la section de l'hyperboloïde par le plan tangent au cône ; si l'on tire Y de l'une des équations pour le porter dans l'autre, on obtient comme résultat la relation

$$\left(\frac{X}{a}-\frac{Z}{c}\sin\varphi\right)^2-\cos^2\varphi=0$$

décomposable en deux équations du premier degré ; à chacun des deux facteurs correspond une droite faisant partie de l'intersection ; celle-ci se compose de deux droites représentées par les équations

$$D\left\{\begin{aligned}\frac{X}{a}&=\frac{Z}{c}\sin\varphi+\cos\varphi,\\ \frac{Y}{b}&=-\frac{Z}{c}\cos\varphi+\sin\varphi;\end{aligned}\right. \qquad D'\left\{\begin{aligned}\frac{X}{a}&=\frac{Z}{c}\sin\varphi-\cos\varphi,\\ \frac{Y}{b}&=-\frac{Z}{c}\cos\varphi-\sin\varphi;\end{aligned}\right.$$

ces droites sont bien deux génératrices de l'hyperboloïde, parallèles à la génératrice considérée du cône asymptote.

---

188. — *Trouver les propriétés des diamètres et des plans diamétraux d'un paraboloïde.*

En appliquant les équations (5) et (6) du n° 307 au cas où la quadrique est un paraboloïde représenté par l'équation

$$f(x, y, z)=\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0,$$

nous aurons pour équation du plan diamétral de la direction (l, m, n):

$$-l+\frac{my}{p}+\frac{nz}{q}=0.$$

Ce plan est en général parallèle à l'axe du paraboloïde; il n'y a d'exception que si m et n sont nuls, la direction est alors elle-même parallèle à l'axe de la surface; l'équation du plan diamétral se réduit alors à $-l=0$; elle n'est satisfaite par aucun système de valeurs de x, y, z, et il n'y a plus de plan diamétral.

Les équations du diamètre du plan de paramètres L, M, N sont

$$-\frac{1}{L}=\frac{y}{pM}=\frac{z}{qN};$$

ce diamètre est en général parallèle à l'axe; le seul cas d'exception est celui où L est nul, le plan donné est alors lui-même parallèle à l'axe de la surface; les équations donnent pour y et z des valeurs infinies, il n'y a plus de diamètre.

---

189. — *On considère trois diamètres conjugués quelconques d'un ellipsoïde et le parallélépipède construit sur ces trois diamètres, démontrer :* 1° *que la somme des carrés des arêtes de ce parallélépipède est constante;* 2° *que la somme des carrés des surfaces de ses faces est constante;* 3° *que son volume est constant. On démontrera d'abord cette proposition en supposant qu'un diamètre reste fixe et que les deux autres varient dans le plan diamétral conjugué; on passera de là au cas général en comparant deux systèmes quelconques de trois diamètres à d'autres systèmes ayant entre eux ou avec ceux-là un diamètre commun.*

Considérons, comme au n° 308, un système de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde MOM_1, $M'OM'_1$, $M''OM''_1$ (fig. 76) dont les longueurs sont $2a'$, $2b'$, $2c'$, et imaginons un deuxième système de trois diamètres, de longueurs $2a'$, $2b''$, $2c''$ ayant en commun avec le premier le diamètre $MOM_1=2a'$. Les diamètres $2b'$, $2c'$, $2b''$, $2c''$ sont alors contenus dans un même plan, le plan diamétral conjugué de MOM_1 et ils forment dans ce plan deux systèmes de diamètres conjugués de l'ellipse, intersection de la surface par ce même plan. D'après

les théorèmes d'Apollonius (n° 282), on a $4b'^2 + 4c'^2 = 4b''^2 + 4c''^2$, et la surface du parallélogramme construit sur $2b'$ et $2c'$ est égale à la surface du parallélogramme analogue construit sur $2b''$ et $2c''$; on en conclut que la somme des carrés des diamètres et le volume du parallélépipède construit sur ces diamètres est le même pour les deux systèmes considérés.

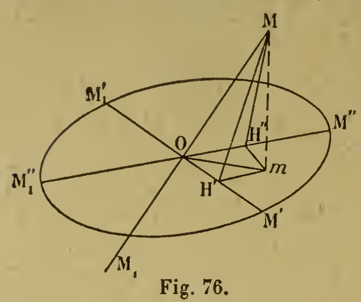


Fig. 76.

Je vais démontrer que la somme des carrés des faces du parallélépipède est aussi la même pour les deux systèmes ou bien que la somme des carrés des surfaces des parallélogrammes construits sur OM et OM', sur OM et OM'', sur OM' et OM'' garde la même valeur quand on passe d'un système à l'autre. Or l'aire du parallélogramme construit sur OM' et OM'' est constante ; si l'on abaisse du point M une perpendiculaire Mm sur le plan diamétral conjugué et ensuite les perpendiculaires MH' et MH'' sur OM' et OM'', il suffit de démontrer que la somme

$$\overline{OM'}^2 \cdot \overline{MH'}^2 + \overline{OM''}^2 \cdot \overline{MH''}^2 = \left(\overline{OM'}^2 + \overline{OM''}^2\right) \overline{Mm}^2 + \left(\overline{OM'}^2 \cdot \overline{mH'}^2 + \overline{OM''}^2 \cdot \overline{mH''}^2\right)$$

a la même valeur quand on passe d'un système à l'autre ; mais $\overline{OM'}^2 + \overline{OM''}^2$ a une valeur constante ; il suffit donc de démontrer que la somme des carrés des aires des parallélogrammes construits sur OM' et Om, sur OM'' et Om est aussi constante.

Imaginons pour cela l'ellipse, intersection de la surface par le plan M'OM'', rapportée à ses axes dont nous désignerons les longueurs par $2a_1$ et $2b_1$; désignons par φ et $\varphi + \frac{\pi}{2}$, comme au n° 282, les paramètres directeurs de M' et M'' et par (x, y) les coordonnées de m ; l'aire du parallélogramme construit sur OM' et Om est égale à $|xb_1 \sin\varphi - ya_1 \cos\varphi|$ et celle du parallélogramme construit sur OM'' et Om est égale à la valeur absolue de

$$xb_1 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - ya_1 \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = xb_1 \cos\varphi + ya_1 \sin\varphi ;$$

la somme des carrés de ces aires est égale à $b_1^2x^2 + a_1^2y^2$ et elle est la même pour tous les systèmes de diamètres conjugués de l'ellipse ; la proposition se trouve ainsi démontrée.

Les trois propriétés que nous venons d'établir relativement à deux systèmes de diamètres conjugués ayant un diamètre commun se généralisent à deux systèmes quelconques : Soient MOM_1, $M'OM'_1$, $M''OM''_1$ un premier système ; NON_1, $N'ON'_1$, $N''ON''_1$ un deuxième système ; les plans $M'OM''$ et $N'ON''$ ont en commun un diamètre POP_1 ; on peut alors imaginer un troisième système constitué par MOM_1, POP_1 et un autre diamètre convenablement choisi dans le plan $M'OM''$, et de même un quatrième système constitué par NON_1, POP_1 et un autre diamètre convenablement choisi dans le plan $N'ON''$. On peut alors passer du premier système au deuxième par l'intermédiaire du troisième et du quatrième, chaque système et celui qui le suit ont en commun un diamètre et possèdent les propriétés énoncées ; on en conclut que ces propriétés sont vraies pour deux systèmes quelconques de diamètres conjugués.

Elles constituent les théorèmes d'Apollonius relatifs aux diamètres conjugués de l'ellipsoïde et s'expriment ainsi :

Si l'on forme un parallélépipède avec trois diamètres conjugués : 1° la somme des carrés des arêtes ; 2° la somme des carrés des faces ; 3° le volume du parallélépipède sont constants.

Si l'on appelle a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde ; a', b', c' les longueurs de trois demi-diamètres conjugués, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ les angles de ces demi-diamètres deux à deux et si l'on désigne par $\sqrt{\omega}$ ce que nous appellerons dans l'exercice suivant le sinus du trièdre qu'ils forment, nous aurons les équations

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$b'^2c'^2 \sin^2 \theta_1 + c'^2a'^2 \sin^2 \theta_2 + a'^2b'^2 \sin^2 \theta_3 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2,$$

$$a'b'c' \sqrt{\omega} = abc.$$

---

190. — *Déterminer les angles d'un triangle sphérique connaissant les trois côtés, et rendre calculables par logarithmes les formules donnant* $\cos\frac{A}{2}$, $\sin\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$. *Déduire de là l'expression du volume*

d'un parallélépipède quelconque connaissant les longueurs des arêtes et les angles des faces de ce parallélépipède.

Si a, b, c sont les côtés donnés et A, B, C les angles opposés inconnus d'un triangle sphérique, la formule du n° 311

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

et les formules analogues déterminent séparément cos A, cos B et cos C.

En calculant cos A et formant les deux expressions

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c},$$

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c},$$

on peut rendre les derniers termes calculables par logarithmes ; en posant $a + b + c = 2p$, on trouve ainsi

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p - a)}{\sin b \sin c}}, \qquad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p - b) \sin (p - c)}{\sin b \sin c}}$$

d'où
$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p - b) \sin (p - c)}{\sin p \sin (p - a)}}$$

$$= \frac{1}{\sin (p - a)} \sqrt{\frac{\sin (p - a) \sin (p - b) \sin (p - c)}{\sin p}}.$$

Si r est la mesure en radian du rayon du cercle inscrit dans le triangle, ce rayon est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'autre côté est égal à $p - a$ et l'angle opposé est $\frac{A}{2}$; d'après la formule $\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B$, on voit que le radical de la formule donnant $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ est égal à $\operatorname{tg} r$.

Si nous formons le produit $\sin A = 2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2}$, nous trouvons

$$\sin A = \frac{1}{\sin b \sin c} \left[2 \sqrt{\sin p \sin (p - a) \sin (p - b) \sin (p - c)}\right],$$

l'expression entre crochets, qui est la valeur commune des produits tels que $\sin b \sin c \sin A$, s'appelle le sinus du trièdre et est désignée

par $\sqrt{\omega}$; on peut vérifier qu'elle est égale à la racine carrée du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$

en employant un mode de raisonnement analogue à celui qui a fourni la valeur du déterminant de l'exercice 4. Ce sinus est nul si les trois faces sont dans un même plan, car l'une des quantités p, $p-a$, $p-b$, $p-c$ est égale à 0 ou à un multiple de π.

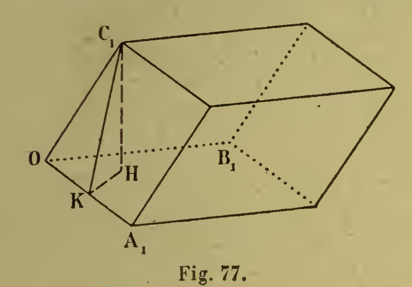


Fig. 77.

Pour calculer le volume d'un parallélépipède construit sur trois arêtes $OA_1 = a_1$, $OB_1 = b_1$, $OC_1 = c_1$ formant un trièdre (fig. 77), nous abaisserons du point C_1 une perpendiculaire C_1H sur le plan de la face opposée et une perpendiculaire C_1K sur OA_1. Si nous désignons par a, b, c les angles, et par A, B, C les dièdres du trièdre $OA_1B_1C_1$, ces six quantités sont identiques aux six éléments d'un triangle sphérique ; le volume du parallélépipède est égal à

$$V = \text{surface}\,(OA_1,\ OB_1) \times C_1H = a_1b_1 \sin c \times C_1H\,;$$

comme $C_1H = C_1K \sin A = OC_1 \sin b \sin A$, nous aurons

$$V = a_1b_1c_1 \sin b \sin c \sin A = a_1b_1c_1\sqrt{\omega},$$

en désignant par $\sqrt{\omega}$ le sinus du trièdre, que nous avons calculé précédemment.

---

191. — *Un plan variable est défini par l'équation*

$$X \sin\theta - Y\cos\theta + mZ - R\theta = 0,$$

où θ est un paramètre variable ; déterminer la surface développable enveloppe de ce plan et l'arête de rebroussement de cette surface ; montrer qu'elle est engendrée par les tangentes à une hélice ; cette surface s'appelle hélicoïde développable.

D'après ce que nous avons dit au n° 315, l'enveloppe du plan est une surface développable dont les génératrices sont définies par l'équation donnée et sa dérivée prise par rapport à θ,

$$x \sin \theta - y \cos \theta + mz - R\theta = 0, \qquad x \cos \theta + y \sin \theta - R = 0.$$

Ces génératrices sont tangentes à l'arête de rebroussement, et les coordonnées du point de contact satisfont aux équations précédentes et à la dérivée de la dernière : $-x \sin \theta + y \cos \theta = 0$.

Ces trois équations résolues par rapport à x, y, z donnent les coordonnées des points de l'arête de rebroussement; leurs valeurs sont

$$x = R \cos \theta, \qquad y = R \sin \theta, \qquad z = \frac{R}{m}\theta\,;$$

ces expressions définissent une hélice (n° 295); il en résulte que l'enveloppe est la surface hélicoïde développable engendrée par les tangentes à cette hélice.

La trace de cette surface sur le plan xOy est définie par les deux premières équations où l'on fait $z = 0$; on en tire les valeurs de x et y

$$x = R \cos \theta + R\theta \sin \theta, \qquad y = R \sin \theta - R\theta \cos \theta\,;$$

ces formules définissent les coordonnées des points de la développante du cercle de base (exercice 176); le lieu des traces des tangentes à une hélice est donc une développante de la base du cylindre sur lequel est tracée cette hélice.

L'élimination de θ entre les équations des génératrices conduirait à l'équation de la surface hélicoïde, mais le résultat est une équation transcendante que nous ne formerons pas.

---

192. — *Trouver l'enveloppe d'un plan qui détermine avec les plans de coordonnées un tétraèdre de volume constant.*

Soient a, b, c les segments déterminés sur les axes de coordonnées par le plan variable déterminant un tétraèdre OABC de volume $V = \frac{abc}{6}$; l'équation du plan et la condition imposée aux paramètres sont

$$f(x, y, z, a, b, c) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0, \quad \varphi(a, b, c) = abc - 6V = 0.$$

On pourrait remplacer dans la première c par sa valeur tirée de la seconde et il resterait deux paramètres indépendants dans l'équation du plan variable, mais il est possible de diriger les calculs d'une manière plus symétrique. En supposant c fonction implicite de a et b tirée de $\varphi(a, b, c) = 0$, nous devons annuler les dérivées de f par rapport à a et b et écrire

$$f'_a + f'_c \frac{\partial c}{\partial a} = 0, \qquad f'_b + f'_c \frac{\partial c}{\partial b} = 0;$$

mais la relation $\varphi(a, b, c) = 0$ donne

$$\varphi'_a + \varphi'_c \frac{\partial c}{\partial a} = 0, \qquad \varphi'_b + \varphi'_c \frac{\partial c}{\partial b} = 0.$$

L'élimination de $\frac{\partial c}{\partial a}$ et $\frac{\partial c}{\partial b}$ entre ces relations donne les deux équations

$$\frac{f'_a}{\varphi'_a} = \frac{f'_b}{\varphi'_b} = \frac{f'_c}{\varphi'_c};$$

en les joignant aux relations $f(x, y, z, a, b, c) = 0$ et $\varphi(a, b, c) = 0$, on a quatre équations entre lesquelles on éliminera a, b, c; on voit l'analogie de ce calcul avec celui des n°s 291 et 312.

Dans le cas qui nous occupe, aux équations primitives, nous devons ajouter les équations

$$\frac{-\frac{x}{a^2}}{bc} = \frac{-\frac{y}{b^2}}{ca} = \frac{-\frac{z}{c^2}}{ab}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c};$$

d'après $f = 0$, la valeur commune de ces rapports doit être égale à $\frac{1}{3}$, de sorte que l'on a $a = 3x$, $b = 3y$, $c = 3z$ et en portant ces valeurs dans la relation $\varphi = 0$, on obtient l'équation de l'enveloppe

$$27xyz - 6V = 0 \qquad \text{ou} \qquad xyz = \frac{2V}{9};$$

elle représente une surface du troisième ordre coupée par les plans parallèles au plan xOy suivant des hyperboles équilatères ; les plans de coordonnées sont des plans asymptotes.

193. — *Déterminer le plan osculateur et le rayon de courbure en un point d'une hélice; quel est le lieu des centres de courbure?*

En appliquant à l'hélice (n° 95) les formules des n°s 316 à 320, nous aurons

$$\begin{array}{lll} x = R\cos t, & y = R\sin t, & z = kRt, \\ x' = -R\sin t, & y' = R\cos t, & z' = kR, \\ x'' = -R\cos t, & y'' = -R\sin t, & z'' = 0, \\ A = kR^2\sin t, & B = -kR^2\cos t, & C = R^2; \end{array}$$

l'équation du plan osculateur est, tous calculs faits,

$$X\sin t - Y\cos t + \frac{1}{k}(Z - kRt) = 0.$$

En rapprochant ce résultat de celui de l'exercice 191, on voit que l'enveloppe du plan osculateur à une hélice est identique à la surface développable formée par les tangentes à cette courbe.

Le plan normal à l'hélice a pour équation (n° 296)

$$-X\sin t + Y\cos t + k(Z - kRt) = 0;$$

il coupe le plan osculateur suivant la droite d'équations $Z = kRt$, $Y = X\operatorname{tg} t$, qui est la normale principale à la courbe; elle est parallèle au plan xOy et rencontre l'axe Oz.

Les coordonnées du centre de courbure sont

$$X = -k^2R\cos t, \qquad Y = -k^2R\sin t, \qquad Z = kRt;$$

on voit que ce centre décrit une hélice sur un cylindre de rayon k^2R; le rayon de courbure est égal à $R(1 + k^2)$ et il est constant. Le rayon de torsion est, d'après le n° 320, $T = -\frac{1+k^2}{k}R$; il est aussi constant.

---

194. — *On considère la cubique gauche représentée par les équations*

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3;$$

construire les projections de cette courbe sur les trois plans de coordonnées; trouver les équations de la tangente et du plan osculateur en un point; montrer que par un point de l'espace passent trois plans

osculateurs ; on dit alors que la courbe est de troisième classe ; déterminer la surface développable enveloppe du plan osculateur.

Les projections de la courbe sur les plans de coordonnées sont représentées par les équations

$$y = x^2, \qquad z = x^3, \qquad z^2 = y^3\,;$$

la construction des lignes représentées par ces équations n'offre aucune difficulté ; le calcul des dérivées des coordonnées fournit les valeurs

$$\begin{array}{lll} x' = 1, & y' = 2t, & z' = 3t^2, \\ x'' = 0, & y'' = 2, & z'' = 6t, \\ A = 6t^2, & B = -6t, & C = 2\,; \end{array}$$

les équations de la tangente en un point sont

$$\frac{X - t}{1} = \frac{Y - t^2}{2t} = \frac{Z - t^3}{6t^2},$$

et l'équation du plan osculateur est

$$3t^2X - 3tY + Z - t^3 = 0.$$

Si l'on veut que ce plan passe par un point $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, il faut choisir t de façon que l'équation

$$f(t) = 3t^2x_0 - 3ty_0 + z_0 - t^3 = 0$$

soit satisfaite ; cette équation a trois racines, on peut donc mener à la courbe trois plans osculateurs passant par un point donné.

Si l'on cherche l'intersection du plan d'équation

$$3yx_0 - 3xy_0 + z_0 - z = 0$$

avec la courbe, on trouve précisément la même équation $f(t) = 0$; on en conclut que les trois points de contact des plans osculateurs sont dans le plan précédent, et si l'on remarque que l'équation de ce plan est satisfaite pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, on voit que les trois points de contact et le point donné sont dans un même plan.

Pour obtenir l'enveloppe du plan osculateur, il faut éliminer t entre l'équation de ce plan et sa dérivée $6tX - 3Y - 3t^2 = 0$.

Si l'on remarque que l'on a identiquement

$$3t^2X - 3tY + Z - t^3 = (6tX - 3Y - 3t^2)\frac{t}{3} + (t^2X - 2tY + Z),$$

on voit qu'il suffit d'éliminer t entre les deux équations du second degré

$$t^2 - 2tX + Y = 0, \qquad t^2X - 2tY + Z = 0;$$

en appliquant la formule (11) du n° 223, on obtient comme résultat

$$(XY - Z)^2 - 4(X^2 - Y)(Y^2 - XZ) = 0;$$

cette équation représente une surface du quatrième ordre, qui est en même temps le lieu des tangentes à la cubique.

---

195. — *Déterminer les rayons de courbure principaux en un point d'une surface de révolution; application à l'ellipsoïde de révolution, au paraboloïde de révolution, à la surface engendrée par une chaînette tournant autour de sa base.*

Par raison de symétrie, l'un des axes de l'indicatrice en un point d'une surface de révolution est la tangente à la méridienne passant par ce point, l'autre axe est la tangente au parallèle. Le premier axe est la tangente à une section principale identique à la méridienne, et le rayon de courbure est par conséquent celui de la courbe méridienne au point considéré; le second axe est la tangente à une deuxième section principale. La projection du centre de courbure de cette section sur le plan du parallèle passant par le point donné doit se confondre, d'après le théorème de Meusnier, avec le centre de ce parallèle (n° 321); par suite le centre de courbure de la section principale doit se trouver sur l'axe de révolution de la surface. On conclut de là que les rayons de courbure principaux en un point d'une surface de révolution sont égaux l'un au rayon de courbure de la méridienne et l'autre au segment de la normale à la méridienne compté entre le pied de cette normale et l'axe de révolution.

On arriverait au même résultat par le calcul; prenons comme axe des z l'axe de la surface de révolution, et représentons cette surface par une équation de la forme $z = F\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ (n° 107); nous avons

$$p = \frac{F'x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad q = \frac{F'y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$r = \frac{F''x^2}{x^2+y^2} + \frac{F'y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad s = \frac{F''xy}{x^2+y^2} - \frac{F'xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$t = \frac{F''y^2}{x^2+y^2} + \frac{F'x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et la formule (15) du n° 321 donne pour le rayon de courbure d'une section normale

$$\rho = \frac{x'^2 + y'^2 + F'^2 \dfrac{(xx'+yy')^2}{x^2+y^2}}{F''\dfrac{(xx'+yy')^2}{x^2+y^2} + F'\dfrac{(yx'-xy')^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}}.$$

En considérant ρ comme une fraction du second degré par rapport à la variable $\dfrac{y'}{x'}$, et cherchant ses maxima et minima, on trouve qu'ils ont lieu : 1° pour $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{y}{x}$, ce qui correspond à la tangente à la méridienne ; 2° pour $xx' + yy' = 0$, ce qui correspond à la tangente au parallèle ; les rayons de courbure correspondants sont

$$\rho_1 = \frac{(1+F'^2)^{\frac{3}{2}}}{F''}, \qquad \rho_2 = \frac{(1+F'^2)^{\frac{1}{2}}}{F'}\sqrt{x^2+y^2};$$

le premier est bien le rayon de courbure de la méridienne et le deuxième la longueur de la normale entre le pied de cette droite et l'axe.

Dans le cas d'un ellipsoïde de révolution autour de Oz représenté par $\dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{x^2+y^2}{a^2} - 1 = 0$, on a

$$\rho_1 = \frac{[a^4z^2 + c^4(x^2+y^2)]^{\frac{3}{2}}}{a^4c^4}, \qquad \rho_2 = \frac{a}{c^2}[z^2(a^2-c^2)+c^4]^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le cas d'un paraboloïde représenté par $z = \dfrac{x^2+y^2}{2p}$, on a

$$\rho_1 = p\left(1 + \frac{2z}{p}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad \rho_2 = p\left(1+\frac{2z}{p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le cas de la surface de révolution engendrée par une chaînette tournant autour de sa base et représentée par l'équation

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right),$$

on peut résoudre cette équation par rapport à $e^{\frac{z}{a}}$, en déduire z en fonction de $\sqrt{x^2+y^2}$ et appliquer les formules précédentes ; on constate que les rayons de courbure principaux sont égaux en valeur absolue, mais de signes contraires, et leur valeur absolue est égale à $\frac{x^2+y^2}{a}$; cela résulte de la propriété démontrée dans l'exercice 174.

---

196. — *Démontrer que l'on peut déterminer un tore tangent à une surface donnée en un point donné, de façon que les sections de ce tore et de la surface par un plan quelconque passant par le point de contact aient même rayon de courbure en ce point.*

Considérons un tore engendré par un cercle de rayon r tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne le coupant pas ; les extrémités du diamètre du cercle générateur perpendiculaire à l'axe décrivent, dans le plan de l'équateur, deux cercles de rayons R_1 et $R_2 < R_1$. En tous les points du premier, les sections principales de la surface sont deux cercles situés d'un même côté du plan tangent et de rayons R_1 et r ; en tous les points du second les sections principales sont deux cercles situés cette fois de part et d'autre du plan tangent, et de rayons R_2 et r.

Cela posé, supposons qu'en un point d'une surface donnée les courbures soient de même sens, et que les rayons de courbure principaux soient R_1 et r ; on pourra construire un tore ayant les mêmes rayons principaux au point considéré ; les indicatrices seront les mêmes et par suite les sections de la surface donnée et du tore par un plan passant par le point auront le même rayon de courbure. On pourra opérer de même si les courbures sont de sens opposé, les rayons de courbure principaux étant égaux en valeur absolue à R_2 et r.

Dans le cas où le point considéré sur la surface donnée est un point parabolique, on peut trouver un cylindre de révolution ayant mêmes rayons de courbure principaux que la surface en ce point ; ce cylindre remplacera le tore précédent.

Le tore n'est pas la surface la plus simple jouissant de la propriété considérée ; un paraboloïde elliptique ou hyperbolique ayant pour sommet le point donné, pour axe la normale à la surface et pour paramètres $p = r$ et $q = R_1$ ou $-R_2$ pourra être utilisé de la même manière.

EXERCICES SUR LE CALCUL INTÉGRAL

197. — *Déterminer les intégrales indéfinies des fonctions suivantes:*

$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$,	$\frac{x+2}{x^4-1}$,	$\frac{3x^2-2x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$,
$\frac{1}{(x-a)^2}$,	$\frac{x}{2+\sqrt{1+x}}$,	$\sin^4 x$,
$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$,	$\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}$,	$\frac{\sin 2x}{\cos 3x}$,
$\frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5}$,	$\sqrt{a^2-x^2}$,	$\frac{1}{1+\cos^2 x}$,
$\frac{1}{x^3(x-1)^2}$,	$\sqrt{x^2+A}$,	$\frac{1}{\sqrt{\cos x(1-\cos x)}}$,

Nous appellerons y la fonction et Y l'intégrale; elle est obtenue sans la constante arbitraire.

1° $y = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$; $\quad Y = x - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^4}{3.4}$.

2° $y = \frac{1}{(x-a)^2}$; $\quad Y = -\frac{1}{x-a}$.

En décomposant les fractions rationnelles en fractions simples, on a

3° $y = \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{x-b}$;

$$Y = \frac{1}{a-b}[\log(x-a) - \log(x-b)] = \frac{1}{a-b}\log\frac{x-a}{x-b}.$$

4° $y = \frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5} = 1 + \frac{12x}{(x-1)(x-5)} = 1 - \frac{3}{x-1} + \frac{15}{x-5};$

$$Y = x - 3\log(x-1) + 15\log(x-5).$$

5° $y = \frac{1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}.$

En chassant les dénominateurs et identifiant, on a $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 1$, $E = -3$, et l'intégrale est

$$Y = -\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} + 3\log x - \frac{1}{x-1} - 3\log(x-1)$$
$$= -\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + 3\log\frac{x}{x-1}.$$

6° $y = \frac{x+2}{x^4-1} = \frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

En chassant les dénominateurs et identifiant, on a $A = \frac{3}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = -1$, de sorte que l'intégrale est

$$Y = \frac{3}{4}\log(x-1) - \frac{1}{4}\log(x+1) - \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \text{arc tg}\, x$$
$$= \frac{1}{4}\log\frac{(x-1)^3}{(x+1)(x^2+1)} - \text{arc tg}\, x.$$

7° $y = \frac{x}{2+\sqrt{1+x}}$. En posant $\sqrt{1+x} = t$ (n° 340), on a $x = t^2 - 1$, $dx = 2t\,dt$ et l'on est ramené à intégrer la fonction

$$\frac{(t^2-1)2t}{2+t} = 2t^2 - 4t + 6 - \frac{12}{t+2},$$

dont l'intégrale est

$$Y = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 6t - 12\log(t+2) = \frac{2}{3}\sqrt{1+x}\,(1+x) - 2(1+x)$$
$$+ 6\sqrt{1+x} - 12\log(2+\sqrt{1+x})$$

8° $y = \frac{x}{\sqrt{a + bx^2}}$. En posant $y = \frac{1}{2b} \frac{2bx}{\sqrt{a + bx^2}}$, on voit apparaître au numérateur la dérivée de $a + bx^2$ et l'intégrale est

$$Y = \frac{1}{b}\sqrt{a + bx^2}.$$

9° $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. On peut appliquer les transformations indiquées au n° 341 (2e cas) et poser $a + x = (a - x)t^2$, mais il est plus avantageux de faire la transformation $x = a \sin t$, ce qui donne $dx = a \cos t dt$ et l'on est ramené à intégrer la fonction

$$a^2 \cos^2 t = \frac{a^2}{2}(1 + \cos 2t),$$

dont l'intégrale est

$$\frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2 \sin 2t}{4} = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2 \sin t \cos t}{2};$$

il suffit alors de remplacer t par $\arcsin \frac{x}{a}$, puis $\sin t$ par $\frac{x}{a}$ et $\cos t$ par $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ pour obtenir l'intégrale

$$Y = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

10° $y = \sqrt{x^2 + A}$. En opérant comme au n° 341 (1er cas), on posera

$$t = x + \sqrt{x^2 + A},$$

d'où $(t - x)^2 = x^2 + A$, $x = \frac{t^2 - A}{2t}$, $dx = \frac{t^2 + A}{2t^2} dt$,

et $\sqrt{x^2 + A} = t - x = \frac{t^2 + A}{2t}$, on est ainsi ramené à intégrer la fonction

$$\frac{(t^2 + A)^2}{4t^3} = \frac{t}{4} + \frac{A}{2t} + \frac{A^2}{4t^3},$$

dont l'intégrale est

$$Y = \frac{t^2}{8} - \frac{A^2}{8t^2} + \frac{A}{2}\log t = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \log\left(x + \sqrt{x^2 + A}\right).$$

11° $y = \frac{3x^2 - 2x^4}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$. Il serait possible d'effectuer l'intégration en

posant $(1+x)=(1-x)t^2$; mais il est préférable de se servir de formules de récurrence analogues à celles qui ont été utilisées à la fin du n° 338. Une première formule est déduite de l'identité

$$\frac{d}{dx}\left[x^m\sqrt{1-x^2}\right]=mx^{m-1}\sqrt{1-x^2}-\frac{x^{m+1}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{mx^{m-1}-(m+1)x^{m+1}}{\sqrt{1-x^2}};$$

elle donne

$$(m+1)\int\frac{x^{m+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx=m\int\frac{x^{m-1}}{\sqrt{1-x^2}}dx-x^m\sqrt{1-x^2};$$

elle permet de diminuer l'exposant de x au numérateur dans les intégrales de la forme $\int\frac{x^p dx}{\sqrt{1-x^2}}$; on parvient ainsi au cas de $p=0$, ce qui donne $\arcsin x$, ou bien au cas de $p=1$, ce qui donne $-\sqrt{1-x^2}$.

Une deuxième formule de récurrence se déduit de l'identité

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{mx^{m-1}}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x^{m+1}}{\sqrt{(1-x^2)^3}},$$

qui donne

$$\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}-m\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

appliquée au cas actuel lorsque $m=1$ et $m=3$, cette formule donne

$$\mathrm{Y}=\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}-3\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+6\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

la première formule donne d'autre part

$$2\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-x\sqrt{1-x^2};$$

on obtient par suite comme résultat

$$\mathrm{Y}=\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}-3x\sqrt{1-x^2}=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

12° $y=\sin^4 x$. En introduisant, comme au n° 243, les multiples de x, on a

$$y=\frac{(1-\cos 2x)^2}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x,$$

ce qui donne l'intégrale

$$Y=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x.$$

13° $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}=\dfrac{2\sin x\cos x}{4\cos^3 x-3\cos x}=\dfrac{2\sin x}{4\cos^2 x-3}.$

On est amené à introduire comme variable $\cos x=t$ dont la dérivée est $-\sin x$, on obtient ainsi

$$Y=\int\frac{-2dt}{4t^2-3}=\int\frac{dt}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{t-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{2t+\sqrt{3}}{2t-\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{2\cos x+\sqrt{3}}{2\cos x-\sqrt{3}}.$$

14° $y=\dfrac{1}{1+\cos^2 x}$. Si l'on exprimait $\cos^2 x$ en fonction de $2x$, on serait amené à prendre comme variable la tangente de la moitié de $2x$, donc à poser $\operatorname{tg} x=t$, d'où

$$x=\operatorname{arc\,tg} t,\qquad dx=\frac{dt}{1+t^2},\qquad \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},$$

ce qui donne

$$Y=\int\frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right).$$

15° $y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x(1-\cos x)}}$. En prenant $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$ comme nouvelle variable, on a $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $1-\cos x=\dfrac{2t^2}{1+t^2}$, et l'on trouve

$$Y=\int\frac{\sqrt{2}\,dt}{t\sqrt{1-t^2}}.$$

Comme t entre en dehors du radical par une puissance impaire, on est amené à poser $1-t^2=u^2$, d'où $-tdt=udu$, et l'intégrale devient

$$Y=\sqrt{2}\int\frac{-du}{1-u^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\log\frac{1-u}{1+u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\log\frac{1-\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}{1+\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}.$$

---

198. — *Appliquer la méthode d'intégration par parties aux fonctions $x^m e^{ax}$, $x^m \cos bx$, $x^m \sin bx$, $x^m \log x$, m étant un nombre entier positif, ainsi qu'aux fonctions $e^{ax}\cos bx$ et $e^{ax}\sin bx$.*

En posant $u = x^m$ et $dv = e^{ax}dx$, l'intégration par parties donne

$$\int x^m (e^{ax}dx) = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \int \frac{mx^{m-1}e^{ax}}{a}dx;$$

en opérant de même avec l'exposant $m-1$, et ainsi de suite, on trouve, à une constante près,

$$\int x^m e^{ax}dx$$
$$= e^{ax}\left[\frac{x^m}{a} - \frac{mx^{m-1}}{a^2} + \frac{m(m-1)x^{m-2}}{a^3} - \cdots + (-1)^m \frac{m(m-1)\cdots 3.2.1}{a^{m+1}}\right].$$

L'intégrale est égale au produit de e^{ax} par un polynome $P_m(x)$ de degré m satisfaisant à la condition

$$\frac{d}{dx}[e^{ax}P_m(x)] = x^m e^{ax}, \quad \text{ou} \quad \frac{dP_m(x)}{dx} + aP_m(x) = x^m.$$

La même méthode appliquée aux deux intégrales suivantes donne les deux équations

$$\int x^m(\cos bx\, dx) = \frac{x^m \sin bx}{b} - \int \frac{mx^{m-1}\sin bx}{b}dx,$$

$$\int x^m(\sin bx\, dx) = \frac{-x^m \cos bx}{b} + \int \frac{mx^{m-1}\cos bx}{b}dx;$$

en les utilisant alternativement pour des valeurs décroissantes de m, on a

$$\int x^m \cos bx\, dx = \frac{x^m \sin bx}{b} + \frac{mx^{m-1}\cos bx}{b^2} - \frac{m(m-1)x^{m-2}\sin bx}{b^3}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}\cos bx}{b^4} + \cdots,$$

$$\int x^m \sin bx\, dx = -\frac{x^m \cos bx}{b} + \frac{mx^{m-1}\sin bx}{b^2} + \frac{m(m-1)x^{m-2}\cos bx}{b^3}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}\sin bx}{b^4} - \cdots$$

Il serait du reste facile d'établir ces formules en remplaçant dans

l'intégrale de $x^m e^{ax}$, le nombre a par bi, ce qui remplace e^{ax} par $\cos bx + i \sin bx$; en séparant ensuite les parties réelles et les parties imaginaires, on arrive au résultat trouvé.

La même méthode donne les deux formules

$$u = \int \cos bx \,(e^{ax}dx) = \frac{\cos bx\, e^{ax}}{a} + \int \frac{b}{a} \sin bx\, e^{ax}dx,$$

$$v = \int \sin bx (e^{ax}dx) = \frac{\sin bx\, e^{ax}}{a} - \int \frac{b}{a} \cos bx\, e^{ax}dx ;$$

on en déduit

$$u = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx), \qquad v = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx) ;$$

on arriverait du reste au même résultat en utilisant la relation

$$\int e^{(a+bi)x}dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} = \frac{(a-bi)e^{(a+bi)x}}{a^2+b^2}$$

et en séparant les parties réelles et les parties imaginaires. Enfin, on a

$$\int \log x (x^m dx) = \log x \frac{x^{m+1}}{m+1} - \int \frac{x^m dx}{m+1} = \log x \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}.$$

---

199. — *Lorsqu'une fonction renferme rationnellement deux radicaux portant sur des quantités du premier degré, comme* $\sqrt{a+bx}$ *et* $\sqrt{a'+b'x}$, *montrer qu'on peut l'intégrer en égalant l'un des radicaux à une nouvelle variable* t. *Appliquer à l'intégration de la fonction* $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.

En posant $\sqrt{a+bx} = t$, on a $x = \dfrac{t^2-a}{b}$ et

$$a' + b'x = \frac{b'}{b} t^2 + \frac{ba' - ab'}{b} ;$$

on est ainsi ramené à l'intégration d'une fonction renfermant un seul radical portant sur une fonction du second degré de t.

Dans le cas de la fonction proposée, on posera $1+x=t^2$, d'où $x=t^2-1$, $dx=2tdt$, $1-x=2-t^2$ et l'on aura

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\int \frac{2tdt}{t+\sqrt{2-t^2}}.$$

Pour achever l'intégration, nous ferons le changement $t=\sqrt{2}\cos\varphi$ qui ramène la fonction irrationnelle à une fonction trigonométrique ; cela revient du reste à poser

$$x=2\cos^2\varphi-1=\cos 2\varphi, \qquad dx=-2\sin 2\varphi d\varphi ;$$
$$\sqrt{1+x}=\sqrt{2}\cos\varphi ; \qquad \sqrt{1-x}=\sqrt{2}\sin\varphi,$$

de sorte que l'intégrale primitive se transforme en

$$\int \frac{-\sqrt{2}\sin 2\varphi d\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi}=\int \frac{-2\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi)}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}d\varphi.$$

Sous cette forme, la quantité sous le signe d'intégration se décompose en une somme de deux différentielles, l'une portant sur une fonction de $\sin\varphi$, l'autre sur une fonction de $\cos\varphi$ de la façon suivante

$$\frac{2\sqrt{2}\sin^2\varphi(\cos\varphi d\varphi)}{1-2\sin^2\varphi}-\frac{2\sqrt{2}\cos^2\varphi(\sin\varphi d\varphi)}{2\cos^2\varphi-1}$$

et l'intégrale est égale à

$$-\sqrt{2}\sin\varphi+\sqrt{2}\cos\varphi-\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\varphi+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|+\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos\varphi+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|$$
$$=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}\right| ;$$

dans ces calculs, on doit prendre la valeur absolue de la fonction sous le signe logarithmique.

---

200. — *Appliquer la méthode d'intégration des différentielles binomes à l'intégration des fonctions*

$$\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}, \qquad \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}, \qquad \frac{\sqrt[4]{1+x^3}}{x}.$$

1° La fonction

$$x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}=(ax^{-3}-x^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$

est telle que l'on ait (n° 342) $m=-3$, $n=-2$, $p=-\frac{1}{2}$; le quotient $\frac{np+1}{m-n}=-2$ est entier; on est ainsi amené à écrire la fonction sous la forme $x(ax^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}$ et à poser $ax^{-1}-1=u$, d'où

$$x=\frac{a}{u+1}, \quad dx=\frac{-a\,du}{(u+1)^2}, \quad x(ax^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{-a^2u^{-\frac{1}{2}}du}{(u+1)^3}.$$

Nous parviendrons à une différentielle rationnelle par le changement $u=t^2$ qui conduit à $\frac{-2a^2dt}{(t^2+1)^3}$; pour l'intégrer, nous appliquerons la formule de réduction indiquée à la fin du n° 238, successivement pour $n=2$ et pour $n=1$, ce qui nous donnera

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^3}=\frac{1}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2}+\frac{3}{8}\frac{t}{t^2+1}+\frac{3}{8}\text{ arc tg } t$$

comme $t=\sqrt{u}=\sqrt{\frac{a}{x}-1}$, nous trouverons finalement pour l'intégrale cherchée

$$-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{x}-1}\,(2x^2+3ax)-\frac{3}{4}a^2\text{ arc tg}\sqrt{\frac{a}{x}-1}.$$

2° La fonction $x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$ est telle que p est égal à -1 et est entier; il suffit de poser $x=t^6$ pour être ramené à l'intégrale d'une fonction rationnelle, qui est

$$\int\frac{6t^8dt}{t^4+1}=\int 6(t^4-1)dt+\int\frac{6dt}{t^4+1}.$$

La première intégrale du second membre est égale à $\frac{6}{5}t^5-6t$; le dénominateur entrant dans la seconde est décomposable en un produit de deux trinomes du second degré sous la forme

$$t^4+1=(t^2+1)^2-2t^2=\left(t^2+t\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(t^2-t\sqrt{2}+1\right),$$

et la fraction à intégrer se ramène à la somme de deux autres dont les

numérateurs sont du premier degré; on détermine les coefficients par un calcul d'identification analogue à celui qui a été déjà employé dans l'exercice 197, et l'on obtient

$$\frac{6}{t^4+1}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}t+3}{t^2+t\sqrt{2}+1}+\frac{-\frac{3\sqrt{2}}{2}t+3}{t^2-t\sqrt{2}+1}.$$

On met en évidence dans chacun des numérateurs des fractions simples la dérivée du dénominateur, et l'on ramène l'intégrale à la somme des suivantes :

$$\frac{3\sqrt{2}}{4}\int\frac{(2t+\sqrt{2})dt}{t^2+t\sqrt{2}+1}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\int\frac{(2t-\sqrt{2})dt}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$
$$+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+t\sqrt{2}+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1}.$$

Les deux premières sont égales à

$$\frac{3\sqrt{2}}{4}\left[\log(t^2+t\sqrt{2}+1)-\log(t^2-t\sqrt{2}+1)\right];$$

on obtient la troisième en posant (n° 238) $t+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}u$, ce qui conduit à

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}(t\sqrt{2}+1),$$

et l'on obtient de même la quatrième en posant $t-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}v$, ce qui conduit à $\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}(t\sqrt{2}-1)$. On peut réunir les deux arc tg en un seul en utilisant l'identité

$$\operatorname{arc\,tg} a+\operatorname{arc\,tg} b=\operatorname{arc\,tg}\frac{a+b}{1-ab},$$

et l'on arrive finalement à la somme

$$\frac{6}{5}t^5-6t+\frac{3\sqrt{2}}{4}\log\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2};$$

il suffit de remplacer t par $x^{\frac{1}{6}}$ pour obtenir le résultat cherché.

3° La fonction $(x^{-4}+x^{-1})^{\frac{1}{4}}$ est telle que $m=-4$, $n=-1$,

$p = \frac{1}{4}$, $mp + 1 = 0$; il faut donc employer le changement de variable $1 + x^3 = v$ qui donne $x = (v-1)^{\frac{1}{3}}$, $dx = \frac{1}{3}(v-1)^{-\frac{2}{3}}dv$, $x^{-1}(1+x^3)^{\frac{1}{4}}dx = \frac{1}{3}v^{\frac{1}{4}}(v-1)^{-1}dv$.

On posera ensuite $v = t^4$ et l'on obtiendra la différentielle

$$\frac{4}{3}\frac{t^4}{t^4-1}dt = \frac{4}{3}dt + \frac{1}{3}\frac{dt}{t-1} - \frac{1}{3}\frac{dt}{t+1} - \frac{2}{3}\frac{dt}{t^2+1};$$

en intégrant et remplaçant t par $(1+x^3)^{\frac{1}{4}}$ on trouvera finalement

$$\frac{4}{3}(1+x^3)^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3}\log\frac{(1+x^3)^{\frac{1}{4}}-1}{(1+x^3)^{\frac{1}{4}}+1} - \frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}(1+x^3)^{\frac{1}{4}}.$$

---

201. — *Déterminer le développement en série qui représente l'intégrale de la fonction* e^{-x^2}.

Le développement en série de e^{-x^2} est

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1.2} - \frac{x^6}{1.2.3} + \cdots\cdots;$$

celui de son intégrale indéfinie est, à une constante près,

$$x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{1} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{1.2} - \frac{1}{7}\frac{x^7}{1.2.3} + \cdots\cdots$$

Cette série est convergente pour toute valeur de x ; nous avons calculé sa valeur numérique pour $x = 1$ dans l'exercice 19.

---

202. — *Calculer les intégrales définies*

$$\int_0^1 xe^x\,dx, \qquad \int_0^1 x^2(1-x)^2dx, \qquad \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx.$$

1° Une intégrale indéfinie de xe^x étant (exercice 198) $xe^x - e^x$, l'intégrale définie prise entre 0 et 1 a pour valeur 1.

2° On peut calculer l'intégrale indéfinie et l'on a

$$\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\,dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{30}.$$

3° On peut calculer l'intégrale définie en posant $1 - x = xt^2$, mais on peut aussi opérer de la façon suivante, qui s'applique à la recherche de l'intégrale $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$.

Posons $x = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha$. α variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ quand x varie de a à b, l'intégrale se transforme en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(b-a)^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (b-a)^2\left(\frac{1-\cos 4\alpha}{4}\right)d\alpha = \frac{\pi}{8}(b-a)^2.$$

---

203. — *Un courant périodique de période* T *a une intensité* I *variable avec le temps* t; *on appelle intensité moyenne et intensité efficace les quantités*

$$\frac{1}{T}\int_0^T I\,dt, \qquad \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2dt};$$

calculer ces quantités pour un courant sinusoïdal $I = I_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$, *et pour le courant redressé* $I = I_0\left|\sin\frac{2\pi t}{T}\right|$.

En effectuant le changement de variable $\frac{2\pi t}{T} = x$, on est ramené pour le calcul de l'intensité moyenne du courant sinusoïdal à l'intégrale $\frac{I_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$, qui est nulle, et pour le courant redressé à l'intégrale

$$\frac{I_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = 2\frac{I_0}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{2I_0}{\pi}.$$

Pour l'intensité efficace, on a à calculer $I_0\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx}$; l'intégrale peut être évaluée en introduisant l'angle $2x$, mais on peut remarquer qu'elle est égale à quatre fois l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$;

si l'on change x en $\frac{\pi}{2} - x$, cette dernière devient $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$ et comme elle reste égale à J, on voit que l'on a

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4};$$

par conséquent l'intensité efficace est égale à $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

---

204. — *Calculer les intégrales définies*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx,$$

m étant entier positif; on considérera successivement le cas de m pair et celui de m impair.

Les formules du n° 300 exprimant $\sin^m x$ et $\cos^m x$ en fonction linéaire des sinus et cosinus de x et de ses multiples, ramènent le calcul des intégrales cherchées à celui des intégrales simples

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin px\, dx = \left(-\frac{1}{p}\cos px\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{p}\left(1 - \cos\frac{p\pi}{2}\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos px\, dx = \left(\frac{1}{p}\sin px\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{p}\sin\frac{p\pi}{2};$$

mais on peut arriver plus rapidement au résultat en employant les formules

$$\frac{d}{dx}(\sin^p x \cos x) = p \sin^{p-1} x \cos^2 x - \sin^{p+1} x$$
$$= p \sin^{p-1} x - (p+1)\sin^{p+1} x,$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^p x \sin x) = -p \cos^{p-1} x \sin^2 x + \cos^{p+1} x$$
$$= -p \cos^{p-1} x + (p+1)\cos^{p+1} x,$$

dont les intégrales donnent les formules de récurrence :

$$(p+1)\int \sin^{p+1} x\, dx = -\sin^p x \cos x + p\int \sin^{p-1} x\, dx,$$

$$(p+1)\int \cos^{p+1} x\, dx = +\cos^p x \sin x + p\int \cos^{p-1} x\, dx.$$

En prenant les intégrales entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, les premiers termes des seconds membres donnent un résultat nul pour les deux limites.

Les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx$ ont la même valeur, car elles se ramènent l'une à l'autre par le changement de x en $\frac{\pi}{2} - x$. Si I_m est leur valeur commune, on a $(p+1)I_{p+1} = pI_{p-1}$; en remplaçant successivement $p+1$ par m, $m-2$, ..., on trouve

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2} = \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)} I_{m-4} = \cdots\cdots$$

Si m est pair, on arrive à $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$; si m est impair, à $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1$; on a donc

$$I_m = \frac{(m-1)(m-3)\ldots\ldots 1}{m(m-2)\ldots\ldots 2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{(si } m \text{ est pair)},$$

$$I_m = \frac{(m-1)(m-3)\ldots\ldots 2}{m(m-2)\ldots\ldots 3} \qquad \text{(si } m \text{ est impair)}.$$

---

205. — *Démontrer que les intégrales définies*

(1) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ $(k<1)$,

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, (4) $\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $(k<1)$

(5) $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$, (6) $\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$ $(n>0)$.

ont un sens; déterminer la valeur de la première; trouver la valeur de la seconde sous forme d'un développement en série ordonné suivant les puissances croissantes de k; *montrer que la troisième se ramène à la deuxième en posant* $x = \sin\varphi$, *et la quatrième à la troisième en posant* $x = \frac{1}{ky}$. *La sixième s'appelle intégrale eulérienne de seconde espèce et se représente par* $\Gamma(n)$; *démontrer en intégrant par parties*

que l'on a $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$, *et que si* n *est entier,* $\Gamma(n+1)$ *est égal au produit* $1.2.3\ldots n$.

Pour l'intégrale $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, le quotient différentiel devient infini d'ordre $\frac{1}{2}$ pour les limites et l'intégrale a un sens ; on obtient immédiatement sa valeur, comme dans l'exercice 202, en posant $x = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha$, α variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$; du reste le changement $x - a = (b-x)t^2$ indiqué au n° 341 ne diffère pas du précédent, et il s'y ramène en posant $t = \operatorname{tg}\alpha$; en remplaçant x par sa valeur en fonction de α et dx par $(b-a)2\sin\alpha\cos\alpha d\alpha$, on voit que l'intégrale est égale à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2d\alpha = \pi$$

2° Le développement en série de

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = (1-k^2\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances de k^2 est (n° 183)

$$1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2 x + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}k^4\sin^4 x + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}k^6\sin^6 x + \cdots\cdot$$

et il est convergent quel que soit x pour $k^2 < 1$; en intégrant terme à terme, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = I_0 + \frac{1}{2}k^2 I_2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}k^4 I_4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}k^6 I_6 + \cdots\cdot,$$

I_m étant l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$, dont la valeur a été calculée dans l'exercice précédent ; on a donc comme résultat

$$\frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 k^6 + \cdots\cdot\right].$$

3° L'intégrale $K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ a un sens, car

l'élément différentiel est infini d'ordre $\frac{1}{2}$ pour la limite supérieure ; en posant $x = \sin\varphi$ on a $dx = \cos\varphi\, d\varphi$ et $\mathrm{K} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$; nous venons de calculer sa valeur.

4° L'intégrale $\mathrm{K}' = \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ a un sens, car l'élément différentiel est infini d'ordre $\frac{1}{2}$ pour la limite inférieure, et il se comporte comme $\frac{dx}{x^2}$ pour x infini; en posant $x = \frac{1}{ky}$, $dx = -\frac{dy}{ky^2}$, on a

$$\mathrm{K}' = \int_1^0 \frac{-dy}{ky^2\sqrt{\left(1 - \frac{1}{k^2y^2}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

de telle sorte que K' est égal à K.

5° La fonction e^{-x^2} est telle que $\frac{e^{-x^2}}{x^m}$ tend vers 0 pour x infini quel que soit m ; l'intégrale $\int^{\infty} e^{-x^2}dx$ a donc un sens. Nous pouvons la calculer en la décomposant en deux intégrales sous la forme

$$\int_0^{x_1} e^{-x^2}dx + \int_{x_1}^{\infty} e^{-x^2}dx,$$

x_1 étant un nombre quelconque > 1 ; la valeur de la première de ces deux intégrales est celle de la série de l'exercice 201 ; pour trouver une valeur approchée de la seconde, nous remarquerons que pour toute valeur de $x > 1$ on a $e^{-x^2} < e^{-x}$ de sorte que

$$\int_{x_1}^{b} e^{-x^2}dx < \int_{x_1}^{b} e^{-x}dx;$$

la dernière intégrale est égale à

$$(-e^{-x})_{x_1}^{b} = e^{-x_1} - e^{-b},$$

et a pour limite e^{-x_1} lorsque b croît indéfiniment.

En choisissant x_1 suffisamment grand, ce dernier nombre peut être rendu aussi petit que l'on veut, et en prenant alors un nombre suffisant de termes dans la série qui représente la première intégrale entre 0 et x_1, on aura une valeur approchée de l'intégrale totale. On

démontre par des raisonnements fondés sur la considération des intégrales doubles que celle-ci est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6° L'intégrale eulérienne de seconde espèce

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

a un sens pour n positif, car le quotient de la fonction à intégrer par x^m, m étant quelconque, tend vers zéro pour x infini. L'intégration par parties entre les limites 0 et b donne l'égalité

$$\int_0^b x^n (e^{-x} dx) = (-x^n e^{-x})_0^b + n \int_0^b x^{n-1} e^{-x} dx;$$

lorsque b croît indéfiniment, on en déduit $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

Le calcul numérique de la fonction Γ considérée comme dépendant de la variable n se ramène à la recherche des valeurs de cette fonction lorsque la variable n est comprise entre 0 et 1. Si l'on suppose en effet que n est compris entre les nombres entiers consécutifs p et $p+1$, ou est égal à $p+1$, et si l'on applique la formule de récurrence précédente aux nombres n, $n-1$, ... $n-p$, on trouve

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \cdots (n-p)\Gamma(n-p).$$

Si $n-p=1$, on a $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$, de sorte que pour n entier, on trouve $\Gamma(n+1) = 1.\,2.\,3. \cdots n$. Si $n < 1$, la valeur de l'intégrale peut être calculée comme celle du paragraphe précédent; on peut remarquer du reste en faisant $x = y^2$ que

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty 2y^{2n-1} e^{-y^2} dy,$$

de sorte que dans le cas particulier où $n = \frac{1}{2}$, on a précisément l'intégrale $2\int_0^\infty e^{-y^2} dy$ et on en conclut que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est égal à $\sqrt{\pi}$.

---

206. — *Calculer les coefficients des séries trigonométriques qui représentent entre* $-\pi$ *et* $+\pi$: 1° *la fonction* x^2; 2° *une fonction égale à* -1 *entre* $-\pi$ *et* 0 *et à* $+1$ *entre* 0 *et* π.

L'application des formules du n° 347 à la fonction x^2 entre $-\pi$ et $+\pi$ donne

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3},$$

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 \cos mx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2 \sin mx}{m} + \frac{2x\cos mx}{m^2} - \frac{2\sin mx}{m^3}\right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{4\cos m\pi}{m^2},$$

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 \sin mx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x^2\cos mx}{m} + \frac{2x\sin mx}{m^2} + \frac{2\cos mx}{m^3}\right]_{-\pi}^{+\pi} = 0;$$

on en déduit, entre $-\pi$ et $+\pi$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{1^2}\cos x + \frac{4}{2^2}\cos 2x - \frac{4}{3^2}\cos 3x + \dots.$$

Les mêmes formules appliquées à une fonction f égale à -1 entre $-\pi$ et 0 et à 1 entre 0 et π donnent

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} - dx + \int_0^{\pi} dx\right] = 0,$$

$$A_m = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} - \cos mx\, dx + \int_0^{\pi} \cos mx\, dx\right] = 0,$$

$$B_m = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} - \sin mx\, dx + \int_0^{\pi} \sin mx\, dx\right] = \frac{2}{m\pi}(1 - \cos m\pi);$$

on en déduit

$$f = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right).$$

On pouvait prévoir que le premier développement ne contiendrait que des cosinus et le deuxième que des sinus. En faisant dans le premier $x = 0$, on a

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots$$

et en y faisant $x = \pi$, on a

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

En remplaçant dans le second développement x par $\frac{\pi}{2}$, on trouve

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

et en y remplaçant x par 0 ou π, on obtient 0, ce qui est la demi-somme des valeurs $+1$ et -1.

---

207. — *Effectuer la quadrature et la rectification de la parabole, de la chaînette, de la cycloïde, de la développée de l'ellipse, de la cardioïde, de la lemniscate; pour cette dernière courbe, le calcul de l'arc résulte d'un développement en série.*

1° Nous avons trouvé au n° 354 l'aire d'un segment de parabole; la différentielle de l'arc de cette courbe est égale à $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, et l'on a $ydy = pdx$. Nous choisirons y comme variable indépendante, de sorte que $ds = \sqrt{y^2 + p^2}\,\frac{dy}{p}$. Nous avons trouvé l'intégrale de $\sqrt{x^2 + \mathrm{A}}$ au n° 197; nous aurons par suite

$$s = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\left(\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}\right),$$

en prenant l'arc à partir du sommet jusqu'à un point d'ordonnée positive y.

2° L'aire comprise entre une chaînette, sa base, l'axe Oy et une ordonnée d'abscisse x est

$$\int_0^x ydx = \int_0^x \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\sqrt{y^2 - a^2}.$$

Comme on a $y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$, la différentielle de l'arc de la courbe est égale à

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx,$$

et l'arc compté à partir du sommet est égal à

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \sqrt{y^2 - a^2}$$

On voit que l'aire est égale à sa

3° En utilisant les expressions des coordonnées d'un point de la cycloïde en fonction de t (n° 267 et exercice 175), on a

$$ydx = a^2(1 - \cos t)^2\, dt = a^2\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt,$$

et l'aire comptée à partir de l'origine entre la base et la courbe jusqu'à une ordonnée correspondant à t a pour valeur

$$a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right);$$

en faisant $t = 2\pi$, on voit que l'aire comprise entre l'axe des x et le premier arceau de la courbe est égale à $3\pi a^2$.

La différentielle de l'arc de la courbe est égale à

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = 2a \sin\frac{t}{2}\, dt$$

de sorte que l'on a $s = -4a\cos\frac{t}{2} + C$. Si l'on compte la longueur de l'arc à partir de l'origine, on obtient $s = 4a\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right)$; la longueur totale d'un arceau est égale à la valeur obtenue en faisant $t = 2\pi$, ce qui donne $8a$.

4° Les expressions $x = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi$, $y = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi$ des coordonnées d'un point de la développée de l'ellipse en fonction de φ (n° 294) donnent

$$ydx = \frac{3c^4}{ab}\sin^4\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{3c^4}{16ab}\left(1 - \frac{\cos 2\varphi}{2} - \cos 4\varphi + \frac{\cos 6\varphi}{2}\right) d\varphi;$$

l'intégrale de cette différentielle est

$$\frac{3c^4}{16ab}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4} - \frac{\sin 4\varphi}{4} + \frac{\sin 6\varphi}{12}\right) + C;$$

on obtient le quart de l'aire intérieure à la courbe en faisant varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne $\frac{3\pi c^4}{32ab}$.

La différentielle de l'arc de la courbe est

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 3c^2\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$
$$= \frac{-3c^2}{4ab\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2 - c^2\cos 2\varphi}\,(-\sin 2\varphi\, d2\varphi);$$

on voit que la différentielle de $\cos 2\varphi$ est mise en évidence, de sorte que l'on a à intégrer une expression de la forme $\sqrt{A - Bx}\,dx$ dont l'intégrale est $\frac{-2}{3B}(A - Bx)^{\frac{3}{2}}$; on obtient ainsi comme résultat, à une constante près,

$$s = \frac{(a^2 + b^2 - c^2 \cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{2ab\sqrt{2}}.$$

On aura la longueur du quart de la courbe en faisant varier φ entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne $\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}$; c'est la différence entre les rayons de courbure aux extrémités des axes de l'ellipse; ce résultat pouvait être prévu d'après ce que nous avons dit sur les développantes.

5° La cardioïde est définie par l'équation $\rho = a(1 + \cos\theta)$; l'aire comprise entre l'axe polaire, la courbe et un rayon vecteur de direction θ est égale à

$$\int_0^\theta \frac{\rho^2 d\theta}{2} = \frac{a^2}{2}\int_0^\theta (1 + \cos\theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^\theta \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{3\theta}{2} + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right).$$

Si l'on fait $\theta = \pi$, on obtient l'aire comprise entre l'axe polaire et la courbe; l'aire intérieure à la courbe entière est le double de celle-là et a pour valeur $\frac{3\pi a^2}{2}$.

L'arc de la courbe a pour différentielle

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2} = a\sqrt{\sin^2\theta + (1 + \cos\theta)^2}\,d\theta = 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta;$$

l'intégrale $4a\sin\frac{\theta}{2}$ représente l'arc compté à partir du point de la courbe qui correspond à $\theta = 0$; en faisant $\theta = \pi$, on obtient la longueur de l'arc de la courbe situé d'un côté de l'axe polaire; la longueur totale en est le double et a pour valeur $8a$.

6° La lemniscate est définie par l'équation $\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta$; l'aire

comprise entre l'axe polaire, la courbe et un rayon faisant avec Ox un angle θ inférieur à $\frac{\pi}{4}$ est égale à

$$\int_0^\theta \frac{\rho^2 d\theta}{2} = a^2 \int_0^\theta \cos 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{2} \sin 2\theta.$$

On obtiendra l'aire intérieure à l'une des boucles en prenant le double du résultat précédent correspondant à $\theta = \frac{\pi}{4}$, on obtient ainsi a^2.

L'arc de la lemniscate a pour différentielle $ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 \, d\theta^2}$; comme on a $\rho d\rho = -2a^2 \sin 2\theta \, d\theta$ on trouve en fonction de θ

$$ds = \frac{a\sqrt{2}\, d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}};$$

on ne peut exprimer l'intégrale au moyen des fonctions élémentaires; si l'on remarque que la quantité sous le radical s'écrit $1 - 2\sin^2\theta$ et s'annule pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, on est amené à poser $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t$, t variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on obtient de cette façon

$$ds = \frac{adt}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 t}};$$

on est ramené à une intégrale considérée dans l'exercice 205, où l'on fait $k^2 = \frac{1}{2}$; l'arc de la courbe compris entre les angles polaires $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ est égal à

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{adt}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 t}} = \frac{a\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right]$$

ou bien $s = 1{,}854\, a$; la longueur totale de la lemniscate est quatre fois plus grande.

On peut effectuer le calcul de l'arc de la lemniscate en prenant le rayon vecteur comme variable; si l'on exprime θ et $d\theta$ en fonction

de ρ et $d\rho$ on a $ds = \sqrt{\frac{4a^4}{4a^4 - \rho^4}}\, d\rho$, et, en posant $\rho = a\sqrt{2}\, z$, on obtient $ds = a\sqrt{2}\, \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}}$.

En développant en série la quantité

$$(1 - z^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} z^4 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} z^8 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} z^{12} + \cdots$$

et intégrant terme à terme, on obtient pour valeur de l'arc compté à partir du pôle jusqu'à un point dont le rayon vecteur ρ est inférieur à $a\sqrt{2}$

$$s = a\sqrt{2}\left[\frac{\rho}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\left(\frac{\rho}{a\sqrt{2}}\right)^5 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{1}{9}\left(\frac{\rho}{a\sqrt{2}}\right)^9 + \cdots\right].$$

---

208. — *Trouver l'aire comprise entre les courbes* $y^2 = 2px$, $ay^2 = x^3$.

Les abscisses des points communs aux deux courbes sont les racines de l'équation $2apx - x^3 = 0$; les seules valeurs réelles qui conviennent sont $x_1 = 0$ et $x_2 = (2ap)^{\frac{1}{2}}$; l'aire de la portion de plan comprise entre les deux courbes dans la région des y positifs est égale à $\int_{x_1}^{x_2} (y_1 - y_2)dx$, où $y_1 = (2px)^{\frac{1}{2}}$ et $y_2 = \left(\frac{x^3}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ sont les ordonnées des points des deux courbes correspondant à la même valeur de x; l'intégrale indéfinie est

$$\int\left[(2px)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{x^3}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]dx = \frac{2}{3}(2p)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}};$$

l'aire cherchée est par conséquent

$$\frac{2}{3}(2p)^{\frac{1}{2}}(2ap)^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{5} a^{-\frac{1}{2}}(2ap)^{\frac{5}{4}} = \frac{8}{15}\, ap \sqrt[4]{\frac{2p}{a}}.$$

---

209. — *Rectifier la courbe* $y = x^2$, $9z^2 = 16x^3$.

Les différentielles de y et z étant $2x dx$ et $2x^{\frac{1}{2}}\, dx$, la différentielle de l'arc est

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4x}\, dx = (1 + 2x)\, dx,$$

par suite

$$s = \int (1 + 2x) dx = x + x^2 = x + y,$$

si l'on compte l'arc à partir de l'origine.

---

210. — *Démontrer que l'aire de la surface d'un cylindre parallèle à* Oz *comprise entre le plan des* xy *et une courbe tracée sur le cylindre est représentée par une intégrale de la forme* $\int_{s_0}^{s_1} z\, ds$, s *étant l'arc de la courbe de base. Évaluer de la même manière l'aire de la surface d'un cône comprise entre le sommet et une courbe tracée sur le cône, au moyen d'une intégrale en coordonnées polaires.*

L'aire d'une portion de cylindre limitée par deux génératrices, et par des lignes L_0, L_1 tracées sur la surface, est la limite de l'aire d'un prisme inscrit dans le cylindre dont les arêtes sont limitées aux lignes L_0 et L_1 ; cette aire se compose de trapèzes infiniment petits ; si z est la longueur d'une arête du prisme comprise entre les courbes L_0 et L_1, Δs la corde de la section droite du cylindre comprise entre deux arêtes voisines, l'aire du trapèze a même partie principale que $z\Delta s$ et cette partie principale est égale à $z ds$; la limite de la somme des aires est égale à l'intégrale $\int z ds$ prise entre les valeurs s_0 et s_1 de s correspondant aux traces des génératrices du cylindre entre lesquelles est comprise l'aire à évaluer. On peut remarquer que si l'on développe la surface du cylindre sur un de ses plans tangents, la portion de ce développement comprise entre les arêtes extrêmes et les lignes L_0 et L_1 développées a une aire égale à la précédente.

Considérons une portion de surface conique comprise entre le sommet, deux génératrices G_0 et G_1 et une ligne L tracée sur la surface; son aire est la limite de l'aire d'une pyramide inscrite dont

les arêtes sont limitées à la ligne L, et elle se compose de triangles infiniment petits. Si ρ est la longueur d'une de ces arêtes comprises entre le sommet et L, $\Delta\theta$ l'angle infiniment petit de cette arête avec l'arête voisine, l'aire d'un triangle a même partie principale que l'aire d'un secteur circulaire de rayon ρ et d'angle $\Delta\theta$, c'est-à-dire que $\frac{\rho^2\Delta\theta}{2}$ et cette partie principale est égale à $\frac{\rho^2 d\theta}{2}$; la limite de la somme des aires est égale à $\int\frac{\rho^2 d\theta}{2}$ prise entre les limites θ_0 et θ_1 correspondant aux génératrices G_0 et G_1. On peut remarquer que cette aire a la même expression en coordonnées polaires que celle d'un secteur obtenu en développant sur un plan tangent au cône la portion de surface considérée.

---

211. — *Deux cylindres de révolution égaux ont leurs axes rectangulaires et concourants ; trouver le volume et la surface du solide commun.*

Soit R le rayon de deux cylindres circulaires droits égaux ayant pour axes Ox et Oy ; les équations de ces cylindres sont $y^2+z^2=R^2$ et $z^2+x^2=R^2$; ils se coupent suivant deux courbes planes contenues dans les plans d'équations $y^2-x^2=(y-x)(y+x)=0$, c'est-à-dire dans les plans bissecteurs des dièdres formés par les plans xOz et yOz.

La portion de l'espace commune aux deux cylindres est coupée par un plan de cote z suivant un carré dont les côtés sont situés sur les génératrices des cylindres contenues dans ce plan ; ces génératrices ont pour équations $y=\pm\sqrt{R^2-z^2}$, $x=\pm\sqrt{R^2-z^2}$, les côtés du carré ont pour longueur $2\sqrt{R^2-z^2}$ et sa surface est égale à $4(R^2-z^2)$; le volume commun aux deux cylindres est par suite égal à

$$\int_{-R}^{+R} 4(R^2-z^2)dz = 4\left(R^2z-\frac{z^3}{3}\right)_{-R}^{+R} = \frac{16}{3}R^3.$$

Considérons la surface limitant le solide commun ; elle est formée de quatre fuseaux cylindriques coupés par les plans xOz et yOz suivant des cercles de rayon R ; nous allons évaluer l'aire de ces fuseaux par la méthode de l'exercice précédent. Prenons sur les cercles de section

droite des points situés à l'extrémité de rayons faisant avec Oz l'angle φ; le plan perpendiculaire à Oz et passant par ces points coupe la surface suivant un carré de côté $2R\sin\varphi$ dont le périmètre est égal à $8R\sin\varphi$; la portion de surface latérale comprise entre ce carré et le carré infiniment voisin correspondant à l'angle $\varphi + \Delta\varphi$ a même partie principale que $(8R\sin\varphi)R\Delta\varphi$ et la limite de la somme de ces portions est égale à

$$\int_0^\pi 8R^2 \sin\varphi \, d\varphi = (-8R^2\cos\varphi)_0^\pi = 16R^2;$$

c'est la valeur de la surface limitant le solide commun.

---

212. — *Un segment de cercle a pour corde le côté du triangle équilatéral inscrit; déterminer l'aire et le volume du solide de révolution engendré par ce segment tournant autour de sa corde.*

Fig. 78.

Soient C le centre de l'arc de cercle ADB limitant le segment (fig. 78), φ l'angle d'un rayon CM avec le rayon CD perpendiculaire à la corde AB; le parallèle décrit par le point M a pour rayon

$$PM = R\left(\cos\varphi - \frac{1}{2}\right)$$

et la distance de ce parallèle au centre O de la surface est $z = R\sin\varphi$. Le volume engendré par le segment est égal (nº 359) à

$$V = \int \pi r^2 dz = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} \pi R^2 \left(\cos\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 R\cos\varphi d\varphi;$$

on est ramené à intégrer la fonction

$$\cos^3\varphi - \cos^2\varphi + \frac{1}{4}\cos\varphi = \frac{\cos 3\varphi}{4} - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \cos\varphi - \frac{1}{2};$$

comme l'intégrale de cette quantité entre $-\frac{\pi}{3}$ et $+\frac{\pi}{3}$ est égale à $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$, on voit que $V = \pi R^3\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$.

L'aire de la surface de révolution est (n° 360)

$$S = \int 2\pi r ds = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} 2\pi R\left(\cos\varphi - \frac{1}{2}\right) R d\varphi = 2\pi R^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

---

213. — *Déterminer l'aire et le volume du tore.*

Soient R le rayon du cercle générateur et a la distance de son centre C à l'axe de révolution (fig. 79). Si l'on prend sur le cercle des points M et M′ dont les rayons CM et CM′ font avec la parallèle Cz' à l'axe de révolution des angles $+\varphi$ et $-\varphi$, les distances de ces points à l'axe sont $r = a + R\sin\varphi$ et $r' = a - R\sin\varphi$;

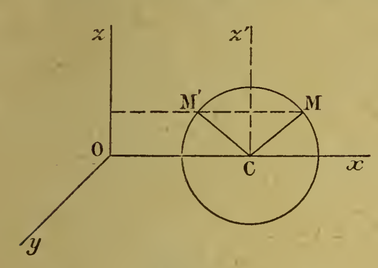


Fig. 79.

la cote de ces points étant $z = R\cos\varphi$, le volume cherché est égal à

$$V = \int_{-R}^{+R} \pi(r^2 - r'^2) dz = \int_{\pi}^{0} -4\pi a R^2 \sin^2\varphi d\varphi$$
$$= \int_0^{\pi} 2\pi a R^2 (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 2\pi^2 a R^2;$$

la surface du tore est égale à

$$S = \int 2\pi(r + r') ds = \int_0^{\pi} 4\pi a R d\varphi = 4\pi^2 a R.$$

---

214. — *Déterminer le moment d'inertie d'une sphère, d'un tore, d'un cône droit par rapport à leur axe de révolution.*

D'après ce que nous avons dit au n° 361, nous décomposons le volume supposé homogène en couronnes comprises entre des cylindres successifs ayant même axe que la surface, et nous prenons l'intégrale $\int \mu . 2\pi r^3 h dr$, μ désignant la masse de l'unité de volume; nous représenterons par M la masse totale du corps.

Dans le cas d'une sphère de rayon R, si nous désignons par φ l'angle d'un rayon avec un diamètre considéré comme axe de révolution,

nous avons $r = R \sin \varphi$, $h = 2R \cos \varphi$; le moment d'inertie est égal à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu 4\pi R^5 \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu 4\pi R^5 (\cos^2 \varphi - \cos^4 \varphi)(\sin \varphi \, d\varphi)$$

$$= \mu 4\pi R^5 \left(\frac{-\cos^3 \varphi}{3} + \frac{\cos^5 \varphi}{5} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu 8\pi R^5}{15} = \frac{2}{5} MR^2.$$

En opérant de même pour un tore avec les notations de l'exercice précédent, nous avons pour valeur du moment d'inertie

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \mu 4\pi (a + R \sin \varphi)^3 R^2 \cos^2 \varphi \, d\varphi,$$

les intégrales de $\sin \varphi \cos^2 \varphi$ et $\sin^3 \varphi \cos^2 \varphi$ prises entre les limites considérées sont nulles ; il suffit de calculer les intégrales

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{8};$$

il en résulte que le moment cherché a pour valeur

$$\mu 4\pi \left(a^3 R^2 \frac{\pi}{2} + 3aR^4 \frac{\pi}{8} \right) = \frac{\mu \pi^2}{2} aR^2 (4a^2 + 3R^2) = M \left(a^2 + \frac{3}{4} R^2 \right).$$

Dans le cas d'un cône droit de rayon R et de hauteur H, on a $\frac{h}{H} = \frac{R - r}{R}$, de sorte que le moment a pour valeur

$$\int_0^R \mu 2\pi \frac{H}{R} r^3 (R - r) dr = \frac{\mu \pi R^4 H}{10} = M \frac{3}{10} R^2.$$

---

215. — *Un fluide élastique se détend dans un cylindre en passant du volume* v_0 *au volume* v *; évaluer le travail effectué pendant la détente : 1° lorsque le fluide satisfait à la relation de Van der Waals (n° 259); 2° lorsque la détente satisfait à la relation* $pv^\gamma = c^{te}$, γ *étant un exposant constant.*

Si $p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2}$, le travail de détente a pour valeur

$$\int_{v_0}^{v} p dv = RT \log \frac{v - b}{v_0 - b} + a \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right);$$

si $pv^\gamma = p_0 v_0^\gamma$, le travail de détente est égal à

$$\int_{v_0}^{v} p_0 v_0^\gamma v^{-\gamma} dv = p_0 v_0^\gamma \left(\frac{v^{-\gamma+1} - v_0^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right) = \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{v_0}{v} \right)^{\gamma-1} \right].$$

---

216. — *Une barre homogène* OA *de section constante négligeable et dont la masse de l'unité de longueur est égale à* μ *est placée le long de l'axe* Ox*; chacun des éléments infiniment petits de cette barre exerce sur un point extérieur* M *de masse* m *une attraction proportionnelle au produit des masses et inversement proportionnelle au carré de la distance; déterminer l'attraction de la barre sur le point* M *et calculer les composantes de cette attraction parallèles aux axes; examiner le cas où la barre a une longueur infinie.*

Un élément infiniment petit AA′ de la barre compris entre les abscisses x et $x + dx$ a une masse μdx; si ξ, η sont les coordonnées d'un point M, le vecteur MA a pour longueur $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}$ et pour cosinus directeurs $\alpha = \frac{x-\xi}{r}$, $\beta = \frac{-\eta}{r}$. Les composantes parallèles aux axes de l'attraction de AA′ sur M sont égales à

$$\frac{m\mu dx}{r^2}\alpha = \frac{m\mu(x-\xi)}{r^3}dx, \qquad \frac{m\mu dx}{r^2}\beta = \frac{-m\mu\eta}{r^3}dx,$$

et l'on doit prendre les intégrales de ces quantités entre les limites x_0 et x_1, abscisses des extrémités A_0 et A_1 de la barre.

Comme on a $(x-\xi)dx = rdr$, la première intégrale est égale à

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{m\mu dr}{r^2} = m\mu\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right),$$

r_0 et r_1 désignant les distances de A_0 et A_1 au point M.

Pour calculer la deuxième, on pose $x - \xi = r \sin t$, $\eta = r \cos t$, t variant de t_0 à t_1, il en résulte $x - \xi = \eta \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{\eta dt}{\cos^2 t}$, $r = \frac{\eta}{\cos t}$ et l'on est ramené à l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{-m\mu \cos t\, dt}{\eta} = \frac{-m\mu}{\eta}(\sin t_1 - \sin t_0).$$

Si la barre a une longueur infinie dans le sens des x positifs, r_1

est infini et t_1 est égal à $\frac{\pi}{2}$; si elle est infinie dans les deux sens, t_0 devient de plus égal à $-\frac{\pi}{2}$, et r_0 est aussi infini; la composante de l'attraction parallèle à Ox devient nulle et la composante parallèle à Oy est égale à $\frac{-2m\mu}{\eta}$.

---

217. — *Trouver le moment d'inertie d'une surface plane par rapport à une droite de son plan, d'un cercle par rapport à son diamètre, d'un demi-cercle par rapport à la parallèle à son diamètre passant par son centre de gravité, d'un rectangle par rapport à l'un de ses côtés.*

On appelle moment d'inertie I, par rapport à une droite D de son plan, d'un élément de surface plane entourant un point M, le produit de l'aire ΔA de cet élément par le carré de la distance r du point M à la droite. Pour une surface plane quelconque, le moment d'inertie I est la limite de la somme $\Sigma(\Delta A)r^2$ étendue aux éléments infiniment petits dans lesquels on peut décomposer la surface; en particulier si D est pris comme axe des x, on a $I = \lim \Sigma y^2 \Delta A$.

Généralement, on décompose la surface en bandes infiniment petites par des parallèles à l'axe Ox; si $b(y)$ est la longueur d'une corde d'ordonnée y comprise à l'intérieur de la surface, on a $\Delta A = b(y)\Delta y$, et le moment d'inertie I est égal à l'intégrale $\int b(y)y^2 dy$ prise entre les limites de l'ordonnée.

Si l'on connaît le moment d'inertie I par rapport à une droite D passant par le centre de gravité G de l'aire supposée homogène, on peut trouver le moment d'inertie I' par rapport à une droite D' parallèle à D; si en effet D est pris comme axe Ox et si a est l'ordonnée de D', on a

$$I' = \lim \Sigma(y-a)^2\Delta A = \lim \Sigma y^2 \Delta A + a^2 \lim \Sigma \Delta A - 2a \lim \Sigma y \Delta A,$$

mais $\Sigma\Delta A$ est égale à l'aire A de la surface et $\lim \Sigma y\Delta A$ est nulle parce que l'ordonnée du centre de gravité est nulle (n° 374); on a donc simplement

$$I' = I + Aa^2.$$

Si l'on considère un cercle de rayon R, on a $b(y) = 2\sqrt{R^2 - y^2}$, de sorte que

$$I = \int_{-R}^{+R} 2\sqrt{R^2 - y^2}\, y^2 dy\,;$$

en posant $y = R \sin \varphi$, on est ramené à l'intégrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 2R^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi\, d\varphi = \frac{\pi R^4}{4},$$

la valeur de cette intégrale résultant d'un calcul déjà fait dans l'exercice 214.

Pour un demi-cercle, le moment d'inertie I' par rapport au diamètre est égal à la moitié de la valeur précédente ou $\frac{\pi R^4}{8}$; comme la distance a du centre de gravité G à ce diamètre est (exercice 219) égale à $\frac{4R}{3\pi}$, le moment d'inertie I par rapport à la droite parallèle au diamètre et passant par le centre de gravité est

$$I = I' - \frac{\pi R^2}{2} a^2 = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{8R^4}{9\pi}.$$

Pour un rectangle de base b et de hauteur h, le moment d'inertie par rapport à la base est $I' = \int_0^h by^2 dy = \frac{bh^3}{3}$; par rapport à une parallèle à la base passant par le centre, le moment d'inertie est $I = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} by^2 dy = \frac{bh^3}{12}$; on voit bien que l'on a $I' = I + \frac{Ah^2}{4}$.

---

218. — *Un liquide s'écoule par un tuyau cylindrique de telle sorte que la vitesse de chaque filet soit $v = v_0 - kr^2$, v_0 étant la vitesse le long de l'axe, r la distance du filet considéré à l'axe et k une constante donnée; trouver le débit du tuyau connaissant son rayon et la vitesse v_0.*

Le débit d'une couronne circulaire comprise entre les rayons r

et $r+dr$, dont l'aire est $dA = 2\pi r dr$, est égal à $v dA = (v_0 - kr^2) 2\pi r dr$; si R est le rayon du tuyau, le débit total est égal à

$$Q = \int_0^R (v_0 - kr^2) 2\pi r dr = \pi R^2 \left(v_0 - k \frac{R^2}{2} \right);$$

la vitesse moyenne est égale à $\frac{Q}{\pi R^2} = v_0 - \frac{kR^2}{2}$.

---

219. — *Déterminer le centre de gravité d'un arc de cercle, de la surface d'un demi-cercle, du volume d'une demi-sphère.*

Prenons pour origine O le centre du cercle, pour axe des x le rayon passant par le milieu de l'arc considéré; si $-\varphi_1$ et $+\varphi_1$ sont les angles formés avec Ox par les rayons passant par les extrémités de cet arc, si R est le rayon du cercle et μ la masse de l'unité de longueur, celle d'un arc de longueur $ds = R d\varphi$ est égale à $m = \mu ds = R\mu d\varphi$ et celle de l'arc entier est $M = 2R\mu\varphi_1$; l'abscisse d'un point de l'arc est $x = R \cos \varphi$, celle du centre de gravité est donnée par l'équation

$$MX = \Sigma mx = \int_{-\varphi_1}^{+\varphi_1} \mu R^2 \cos \varphi \, d\varphi = 2\mu R^2 \sin \varphi_1,$$

d'où

$$X = \frac{R \sin \varphi_1}{\varphi_1}.$$

Pour la demi-circonférence entière, on a $X = \frac{2R}{\pi}$.

Considérons la surface d'un demi-cercle dont le diamètre est pris comme axe des y; si μ désigne la masse de l'unité de surface, celle de la bande comprise entre deux cordes d'abscisses x et $x + dx$ est $2\mu\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$ et celle du demi-cercle est $\frac{\mu\pi R^2}{2}$; l'abscisse X du centre de gravité est donnée par l'équation

$$MX = \Sigma mx = \int_0^R 2\mu\sqrt{R^2 - x^2}\,x dx = \left[-\mu \frac{2}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = \frac{2}{3} \mu R^3,$$

d'ou

$$X = \frac{4R}{3\pi}.$$

Considérons la surface d'une demi-sphère dont le grand cercle

limite est dans le plan xOy ; si μ est la masse de l'unité de surface, celle d'une zone comprise entre les plans de cotes z et $z+dz$ est $\mu 2\pi R dz$, et celle de la surface de la demi-sphère est $\mu 2\pi R^2$; la cote Z du centre de gravité de la demi-sphère est donnée par

$$MZ = \Sigma mz = \int_0^R \mu 2\pi R z dz = \mu\pi R^3,$$

d'où

$$Z = \frac{R}{2}.$$

Si l'on considère le volume de la demi-sphère et si μ est la masse de l'unité de volume, celle d'un segment sphérique compris entre les plans de cotes z et $z+dz$ est (n° 359) $\mu\pi(R^2 - z^2)dz$, celle du volume total est $\mu\frac{2}{3}\pi R^3$, par suite la cote Z du centre de gravité est donnée par

$$MZ = \Sigma mz = \int_0^R \mu\pi(R^2 - z^2) z dz = \frac{\mu\pi R^4}{4},$$

d'où

$$Z = \frac{3}{8}R.$$

---

220. — *Démontrer que le volume d'un tronc de cylindre quelconque limité par des faces planes est égal au produit de l'aire de la section droite par la longueur de la droite joignant les centres de gravité des deux bases.*

Rapportons le tronc de cylindre à un trièdre trirectangle $Oxyz$ dont le plan xOy est un plan de section droite ; désignons par P_0 et P_1 les plans de bases du tronc, par γ_0 et γ_1 les angles aigus des normales à ces plans avec l'axe Oz, par ΔA un élément infiniment petit de l'aire A de la section droite, par ΔA_0 et ΔA_1 les éléments des aires A_0 et A_1 contenues dans les plans P_0 et P_1 et ayant ΔA pour projection ; enfin appelons x, y les coordonnées d'un point M intérieur à ΔA, par z_0 et par z_1 les cotes des points M_0 et M_1 situés dans les plans P_0 et P_1 sur la parallèle à Oz menée par M. Nous avons

$$\Delta A = \Delta A_0 \cos\gamma_0 = \Delta A_1 \cos\gamma_1.$$

Le volume du tronc de cylindre est égal à la limite de la somme

$\Sigma\Delta A(z_1 - z_0)$; les coordonnées des centres de gravité des bases du tronc supposées homogènes sont données par les équations

$$X_0A_0 = \lim \Sigma x\Delta A_0, \quad Y_0A_0 = \lim \Sigma y\Delta A_0, \quad Z_0A_0 = \lim \Sigma z_0\Delta A_0,$$
$$X_1A_1 = \lim \Sigma x\Delta A_1, \quad Y_1A_1 = \lim \Sigma y\Delta A_1, \quad Z_1A_1 = \lim \Sigma z_1\Delta A_1;$$

on en déduit, en multipliant les deux membres des premières équations par $\cos\gamma_0$ et ceux des dernières par $\cos\gamma_1$,

$$X_0 = X_1 = \frac{\lim \Sigma x\Delta A}{A}, \qquad Y_0 = Y_1 = \frac{\lim \Sigma y\Delta A}{A},$$
$$Z_0 = \frac{\lim \Sigma z_0\Delta A}{A}, \qquad Z_1 = \frac{\lim \Sigma z_1\Delta A}{A}.$$

On voit déjà que l'abscisse et l'ordonnée des centres de gravité des aires A_0 et A_1 sont les mêmes que pour la section droite ; par suite la droite qui joint les centres de gravité des bases du tronc est parallèle aux génératrices du cylindre et passe par le centre de gravité de la section droite ; d'autre part, on voit que le volume est égal à

$$\lim \Sigma\Delta A(z_1 - z_0) = A(Z_1 - Z_0);$$

il est par conséquent égal au produit de l'aire de la section droite par la longueur de la droite joignant les centres de gravité des bases.

---

221. — *Trouver le volume compris entre le plan des xy, la surface du paraboloïde de révolution dont l'équation est $2z = x^2 + y^2$ et la surface d'un cylindre parallèle à Oz ayant pour base, soit : 1° un rectangle ayant pour centre l'origine et dont les côtés sont parallèles aux axes Ox et Oy, 2° l'aire comprise dans l'angle des coordonnées positives entre les axes Ox, Oy et l'hyperbole dont l'équation est $xy + x + y - 1 = 0$, 3° l'aire comprise à l'intérieur de la circonférence dont l'équation en coordonnées polaires est $\rho = 2R\cos\theta$; dans ce dernier cas, on emploiera les coordonnées polaires, et l'on déterminera l'aire de la portion du paraboloïde intérieure au cylindre.*

Le volume est égal (n° 368) à l'intégrale double

$$V = \iint z\,dx\,dy = \iint \frac{x^2 + y^2}{2}\,dx\,dy,$$

étendue au champ d'intégration formé par la base du cylindre donné.

1° Si cette base est un rectangle de côtés $2a$, $2b$ parallèles aux axes et ayant pour centre l'origine, l'intégrale est égale à quatre fois l'intégrale étendue aux valeurs de x et y telles que $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$; on a donc (n° 364)

$$V = 4\int_0^a dx \int_0^b \frac{x^2+y^2}{2} dy = 4\int_0^a dx\left(\frac{x^2b}{2}+\frac{b^3}{6}\right) = \frac{2}{3}ab(a^2+b^2).$$

2° Si le champ d'intégration est un triangle mixtiligne OAB (fig. 80) limité par les segments $OA = OB = 1$ pris sur Ox et Oy et par un arc de l'hyperbole donnée joignant les points A et B, on voit que x varie entre 0 et 1 et que pour une valeur donnée de x entre ces limites, y varie entre $y_0 = 0$ et $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$; le volume est donc égal à

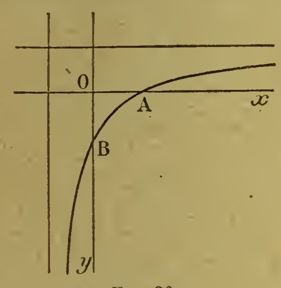


Fig. 80.

$$V = \int_0^1 dx \int_{y_0}^{y_1} z dy.$$

Comme on a

$$\int_{y_0}^{y_1} z dy = \left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{y^3}{6}\right)_0^{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3,$$

on est ramené à intégrer la dernière fonction entre les limites 0 et 1. En décomposant cette fonction en éléments simples sous la forme

$$-\frac{x^2}{2} + x - \frac{7}{6} + \frac{2}{1+x} - \frac{2}{(1+x)^2} + \frac{4}{3(1+x)^3},$$

on voit que son intégrale entre les limites 0 et 1 a pour valeur

$$\left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{7}{6}x + 2\log(1+x) + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{3(1+x)^2}\right]_0^1$$

$$= 2\log 2 - \frac{4}{3} = 0{,}0530\ldots$$

3° En rapportant le champ d'intégration à des coordonnées polaires, le volume est exprimé par l'intégrale

$$\iint z\rho d\rho d\theta = \iint \frac{\rho^3}{2} d\rho d\theta;$$

une première intégration faite par rapport à ρ entre les limites 0 et $\rho_1 = 2R\cos\theta$ donne

$$\int_0^{\rho_1} \frac{\rho^3 d\rho}{2} = \frac{\rho_1^4}{8} = 2R^4 \cos^4\theta\,;$$

on a ensuite à effectuer une deuxième intégration par rapport à θ entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2R^4 \cos^4\theta)\, d\theta.$$

D'après les résultats de l'exercice 204, ce volume est égal à $\frac{3}{4}\pi R^4$.

4° La normale en un point du paraboloïde a pour équations

$$\frac{X-x}{-x} = \frac{Y-y}{-y} = \frac{Z-z}{1}\,;$$

l'angle qu'elle fait avec Oz a pour cosinus

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\,;$$

l'aire de la portion de surface est exprimée par l'intégrale double $\iint \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\, d\rho\, d\theta$, étendue au champ d'intégration, c'est-à-dire par

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\, d\rho = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(1+4R^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} - 1\right] d\theta.$$

La dernière intégration ne peut se faire par des procédés élémentaires, mais on peut la ramener à des intégrales elliptiques (n° 357) en écrivant

$$(1+4R^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} = (1+4R^2)^{\frac{3}{2}}(1-e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}, \qquad e^2 = \frac{4R^2}{1+4R^2}.$$

Le développement en série indiqué au n° 183 et appliqué au cas où $m = \frac{3}{2}$ donne

$$\Big(1 - e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} = 1 - 3\frac{e^2}{2}\sin^2\theta + 3\frac{e^4}{2\,.\,4}\sin^4\theta + 3\frac{1\,.\,e^6}{2\,.\,4\,.\,6}\sin^6\theta$$
$$+ 3\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,e^8}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\sin^8\theta + \ldots\Big);$$

l'intégration terme à terme entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ introduit les intégrales $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta d\theta$ déjà calculées dans l'exercice 204, et l'on trouve finalement

$$\frac{\pi}{3}\left[(1+4R^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]+\pi(1+4R^2)^{\frac{3}{2}}\left[-\frac{e^2}{2^2}+\frac{1.3.e^4}{(2.4)^2}+\frac{1.3.5.e^6}{(2.4.6)^2}+\frac{(1.3)(1.3.5.7)e^8}{(2.4.6.8)^2}+\dots\right].$$

---

222. — *On multiplie chaque élément infiniment petit d'une aire plane par la distance d'un de ses points à un point fixe du plan de cette aire, et l'on forme la limite de la somme de ces produits. Évaluer cette limite: 1° dans le cas d'un cercle, le point fixe étant sur la circonférence; 2° dans le cas d'un rectangle, le point fixe étant un sommet.*

Si le point fixe est pris comme pôle, on a à former la limite de la somme $\Sigma\rho\Delta A$; en employant des coordonnées polaires, cette limite est égale à l'intégrale double $\iint \rho^2 d\rho d\theta$ étendue au champ d'intégration.

Si le champ est un cercle de rayon R passant par l'origine, on peut supposer que l'axe polaire est dirigé suivant un diamètre; lorsque θ est donné entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ρ varie de 0 à $2R\cos\theta$. Il suffit de faire varier θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et de doubler le résultat, de sorte que l'intégrale a pour valeur

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} \rho^2 d\rho = \frac{16}{3}R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \, d\theta;$$

comme on a

$$\int \cos^3\theta \, d\theta = \int (1-\sin^2\theta)\cos\theta \, d\theta = \sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3},$$

on trouve comme résultat $\frac{32}{9}R^3$.

Si le champ est un rectangle compris entre les axes de coordonnées et les droites $x = a$, $y = b$; si de plus, on désigne par α l'angle

formé avec Ox par la diagonale issue du point O, et déterminé par l'équation $b = a \operatorname{tg} \alpha$, on décomposera le champ d'intégration en deux parties par cette diagonale. Pour la première, voisine de Ox, θ varie de 0 à α et ρ varie de 0 à $\dfrac{a}{\cos\theta}$; la portion correspondante de l'intégrale est égale à

$$\int_0^{\alpha} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} \rho^2 d\rho = \frac{a^3}{3}\int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\cos^3\theta}.$$

On évalue l'intégrale indéfinie entrant au second membre en effectuant le changement de variable $\sin\theta = u$ qui donne

$$\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \int \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{(1-u)^2}\right]du$$
$$= \frac{1}{4}\left(\log\frac{1+u}{1-u} - \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right),$$

et l'on obtient comme résultat

$$\frac{a^3}{12}\left(\log\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin\alpha}\right).$$

Pour la deuxième portion, voisine de Oy, il suffit de changer a en b et α en $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$; la somme des deux intégrales a pour valeur, tous calculs faits,

$$\frac{a^3}{12}\log\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{\sqrt{a^2+b^2}-b} + \frac{b^3}{12}\log\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{\sqrt{a^2+b^2}-a} + \frac{1}{3}ab\sqrt{a^2+b^2}.$$

---

223. — *Évaluer au moyen des coordonnées polaires* R, θ, ψ *une intégrale étendue à une portion de sphère de rayon* R *ayant son centre à l'origine. On évaluera l'élément d'aire* $d\sigma$ *comme le quadrilatère* $\alpha\beta\gamma\delta$ *du n° 373. Application à l'intégrale double de* $\cos^2\theta\, d\sigma$ *étendue à la sphère entière.*

Un élément d'aire de la sphère évaluée en fonction de θ et ψ est égal (n° 373) à $R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi$; si l'on suppose donnée une fonction $f(\theta, \psi)$ des coordonnées θ et ψ, on a à évaluer l'intégrale double

$$\int\int R^2 f(\theta, \psi) \sin\theta\, d\theta\, d\psi$$

étendue au champ d'intégration ; si ce champ est la sphère entière, θ varie de 0 à π et ψ de 0 à 2π.

Supposons que l'on ait $f = \cos^2\theta$, on peut effectuer d'abord l'intégrale de $d\psi$ qui est égale à 2π, et l'intégrale double est égale à

$$2\pi R^2 \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \left(\frac{-2}{3}\pi R^2 \cos^3\theta\right)_0^\pi = \frac{4}{3}\pi R^2.$$

---

224. — *Évaluer l'intégrale triple* $\iiint xyz\,dx\,dy\,dz$ *étendue au volume situé dans le trièdre positif des plans de coordonnées entre ces plans et la surface de l'ellipsoïde dont l'équation est*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Opérons comme dans la dernière application faite au n° 374. Si x et y sont les coordonnées d'un point intérieur à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, la cote d'un élément du volume situé sur une parallèle à Oz passant par ce point varie de 0 à $z_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$; l'intégrale du produit xyz, prise par rapport à z entre ces limites, est égale à

$$\left(\frac{xyz^2}{2}\right)_0^{z_1} = \frac{xyc^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

On doit maintenant évaluer l'intégrale double de cette fonction dans le champ d'intégration constitué par le quart de l'ellipse de demi-axes a et b. Si x est donné entre 0 et a, y varie de 0 à $y_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$; l'intégrale prise par rapport à y entre ces limites a pour valeur

$$\frac{xc^2}{2}\left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4b^2}\right]_0^{y_1} = \frac{xb^2c^2}{8}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2.$$

On doit enfin prendre l'intégrale de cette fonction par rapport à x entre 0 et a, ce qui donne

$$\frac{b^2c^2}{8}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2a^2} + \frac{x^6}{6a^4}\right)_0^a = \frac{a^2b^2c^2}{48}.$$

225. — *Intégrer les différentielles totales*

$$\frac{xdx + ydy}{x^2+y^2}, \quad \frac{(ydx - xdy)(x^2-y^2)}{x^2y^2}, \quad z^2dx + 2yz\,dy + (2xz+y^2)dz.$$

1° Les fonctions $P = \frac{x}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{y}{x^2+y^2}$ satisfont à la condition d'intégrabilité (n° 375); l'intégrale indéfinie a pour valeur

$$\int_a^x \frac{xdx}{x^2+y^2} + \int_b^y \frac{y}{a^2+y^2}\,dy$$
$$= \frac{1}{2}[\log(x^2+y^2) - \log(a^2+b^2)] = \log\sqrt{x^2+y^2} + C.$$

2° Les fonctions $P = \frac{y(x^2-y^2)}{x^2y^2}$, $Q = \frac{-x(x^2-y^2)}{x^2y^2}$ satisfont à la condition d'intégrabilité; l'intégrale indéfinie a pour valeur

$$\int_a^x \frac{y(x^2-y^2)}{x^2y^2}\,dx + \int_b^y \frac{-a(a^2-y^2)}{a^2y^2}\,dy$$
$$= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = \frac{x^2+y^2}{xy} + C.$$

3° Les fonctions $P = z^2$, $Q = 2yz$, $R = 2xz + y^2$ satisfont aux conditions d'intégrabilité (n° 377), l'intégrale indéfinie est égale à

$$\int_x z^2dx + \int_b^y 2yzdy + \int_c^z (2az+b^2)\,dz$$
$$= (xz^2 + y^2z) - (ac^2 + b^2c) = (xz^2 + y^2z) + C.$$

---

226. — *Étant données trois fonctions* P, Q, R *de trois variables* x, y, z, *à quelle condition doivent-elles satisfaire pour que l'on puisse trouver un facteur intégrant* μ, *c'est-à-dire une fonction* μ *telle que* $\mu(Pdx + Qdy + Rdz)$ *soit différentielle totale?*

Il faut que le facteur μ satisfasse aux conditions d'intégrabilité qui, développées, s'écrivent

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \mu}{\partial x},$$
$$\mu\frac{\partial Q}{\partial z} + Q\frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu\frac{\partial R}{\partial y} + R\frac{\partial \mu}{\partial y},$$
$$\mu\frac{\partial R}{\partial x} + R\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\frac{\partial P}{\partial z} + P\frac{\partial \mu}{\partial z}.$$

En multipliant les deux membres de ces équations respectivement par R, P et Q, puis en ajoutant et supprimant la solution évidente $\mu = 0$, on trouve la condition nécessaire suivante, à laquelle doivent satisfaire les trois fonctions P, Q et R :

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

---

227. — *Évaluer le travail pour un déplacement dans un champ de forces tel que la force s'exerçant en un point* M *soit dirigée vers un centre fixe* O, *et soit une fonction* $f(r)$ *de la distance* r *du point* M *à ce centre. Cas de l'attraction en raison inverse du carré de la distance.*

Les forces du champ dérivent d'un potentiel, car si l'on prend le centre fixe O comme origine, les composantes de la force sont

$$X = f(r)\frac{x}{r}, \quad Y = f(r)\frac{y}{r}, \quad Z = f(r)\frac{z}{r},$$

et elles sont les dérivées partielles de la fonction des forces

$$\Phi(r) = \int f(r)\,dr.$$

Le travail de la force pour un déplacement entre deux points M_0 et M_1 dont les distances au point O sont r_0 et r_1 a pour valeur

$$\int_{r_0}^{r_1} f(r)\,dr = \Phi(r_1) - \Phi(r_0).$$

Dans le cas de l'attraction en raison inverse du carré de la distance, on a $f(r) = -\frac{k}{r^2}$, $\Phi = \frac{k}{r}$, et le travail est $k\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right)$.

---

228. — *Évaluer l'intégrale curviligne* $\int x^3dy - y^3dx$ *prise le long d'une circonférence ayant pour centre l'origine, dans le sens direct; transformer cette intégrale curviligne en intégrale double.*

En prenant comme paramètre variable l'angle φ d'un rayon avec un rayon origine choisi pour axe Ox, on a

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad dx = -R\sin\varphi\,d\varphi, \quad dy = R\cos\varphi\,d\varphi,$$

et l'intégrale curviligne est égale à

$$\int_0^{2\pi} R^4 (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} R^4 \left(\frac{3}{4} + \frac{\cos 4\varphi}{4}\right) d\varphi = \frac{3}{2}\pi R^4.$$

En transformant l'intégrale curviligne en intégrale double, d'après la formule de Cauchy (n° 387), on a

$$\int x^3 dy - y^3 dx = \iint_A 3(x^2 + y^2)\, dxdy = \iint 3\rho^2 (\rho d\rho d\theta)$$
$$= 2\pi \int_0^R 3\rho^3 d\rho = \frac{3}{2}\pi R^4.$$

---

229. — *Évaluer l'intégrale curviligne*

$$\int (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$

prise le long des côtés successifs d'un triangle ABC *dont les sommets sont sur les axes de coordonnées ; transformer cette intégrale curviligne en intégrale de surface.*

Soient a, b, c les trois segments OA, OB, OC supposés positifs ; les trois côtés du triangle ABC sont les intersections des plans de coordonnées avec le plan d'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Le long de BC, on a $x = 0$, $y = \frac{b}{c}(c - z)$ et z varie de 0 à c ; la portion correspondante de l'intégrale est égale à

$$\int_B^C z dy - y dz = \int_0^c \left(-\frac{zb}{c} - b + \frac{bz}{c}\right) dz = -bc.$$

Les autres portions se calculent de la même manière, de sorte que l'intégrale complète a pour valeur $-bc - ca - ab$.

D'après la formule de Stokes (n° 386), on peut remplacer l'intégrale curviligne par l'intégrale de surface

$$\iint_S -2dydz - 2dzdx - 2dxdy$$

étendue à l'aire du triangle ABC dont la face positive est tournée du

côté des z positifs ; cette intégrale est égale au produit de -2 par la somme des aires des triangles OBC, OCB, OAB, et a pour valeur $-(bc + ca + ab)$.

---

230. — *Un contour fermé est parcouru dans un sens déterminé ; en considérant chaque élément infiniment petit de ce contour comme un vecteur, déterminer le moment résultant par rapport à un point de l'espace de tous les vecteurs ainsi placés sur le contour ; l'évaluer au moyen d'intégrales curvilignes, puis au moyen d'intégrales doubles, et montrer qu'il est indépendant du point choisi.*

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A par rapport auquel on prend les moments, x, y, z celles d'un point du contour, dx, dy, dz les projections d'un arc ds pris à partir de ce point, dans le sens choisi comme sens positif ; en considérant ds comme un vecteur, les composantes du moment de ce vecteur par rapport à A sont

$$(y - y_0)dz - (z - z_0)dy, \qquad (z - z_0)dx - (x - x_0)dz,$$
$$(x - x_0)dy - (y - y_0)dx,$$

et les composantes du moment résultant sont

$$\mathrm{L} = \int_{\mathrm{C}} (y - y_0)dz - (z - z_0)dy,$$
$$\mathrm{M} = \int_{\mathrm{C}} (z - z_0)dx - (x - x_0)dz,$$
$$\mathrm{N} = \int_{\mathrm{C}} (x - x_0)dy - (y - y_0)dx.$$

On peut décomposer chacune de ces intégrales en deux autres dont l'une est indépendante de x_0, y_0, z_0, et l'autre renferme ces coordonnées ; ces dernières parties sont nulles, car les intégrales de dx ou de dy ou de dz le long d'un contour fermé sont nulles ; les valeurs de L, M, N sont donc indépendantes du point A.

La formule de Stokes appliquée aux intégrales curvilignes précédentes donnerait

$$\mathrm{L} = \iint_{\mathrm{S}} 2dydz, \qquad \mathrm{M} = \iint_{\mathrm{S}} 2dzdx, \qquad \mathrm{N} = \iint_{\mathrm{S}} 2dxdy ;$$

ces composantes du moment résultant sont les doubles des aires des projections sur les plans de coordonnées des calottes limitées par le contour donné.

EXERCICES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

231. — *Intégrer les équations obtenues en égalant $\frac{dx}{dt}$ à l'une des fonctions suivantes :*

$$1^\circ \quad (a-x)^2, \qquad 2^\circ \quad (a-x)(b-x), \qquad 3^\circ \quad (a-x)^2(b-x),$$
$$4^\circ \quad (a-x)^2(b-x)^2;$$

ces équations se présentent en chimie dans l'étude des vitesses des réactions.

Dans ces équations différentielles, les variables se séparent et l'on est ramené à intégrer une fraction rationnelle par la méthode de décomposition en fractions simples (nos 336 et 337); on suppose dans ce qui suit que x est inférieur à a et à b.

$$1^\circ \qquad dt = \frac{dx}{(a-x)^2}, \qquad t = \frac{1}{a-x} + \mathrm{C}.$$

En supposant que $x=0$ pour $t=0$, nous avons $\mathrm{C} = -\frac{1}{a}$, et

$$t = \frac{1}{a-x} - \frac{1}{a} = \frac{x}{a(a-x)}, \qquad x = \frac{a^2 t}{1+at}.$$

$$2^\circ \quad dt = \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{a-b}\left[-\frac{dx}{a-x} + \frac{dx}{b-x}\right];$$

$$t = \frac{1}{a-b}\log\frac{a-x}{b-x} + \mathrm{C}.$$

Si $x=0$ pour $t=0$, on a $\mathrm{C} = -\frac{1}{a-b}\log\frac{a}{b}$, et on en tire

$$\frac{(a-x)b}{(b-x)a} = e^{t(a-b)}, \qquad x = ab\,\frac{e^{at}-e^{bt}}{ae^{at}-be^{bt}}.$$

3° $$dt = \frac{dx}{(a-x)^2(b-x)}$$

$$= -\frac{dx}{(a-b)(a-x)^2} - \frac{dx}{(a-b)^2(a-x)} + \frac{dx}{(a-b)^2(b-x)},$$

$$t = \frac{-1}{(a-b)(a-x)} + \frac{1}{(a-b)^2}\log\frac{a-x}{b-x} + C.$$

Si $x=0$ pour $t=0$, on trouve

$$C = \frac{1}{a(a-b)} - \frac{1}{(a-b)^2}\log\frac{a}{b}.$$

4° $$dt = \frac{dx}{(a-x)^2(b-x)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\frac{dx}{(a-x)^2}$$

$$+\frac{1}{(a-b)^2}\frac{dx}{(b-x)^2} + \frac{2}{(a-b)^3}\frac{dx}{a-x} - \frac{2}{(a-b)^3}\frac{dx}{(b-x)},$$

$$t = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}\right) - \frac{2}{(a-b)^3}\log\frac{a-x}{b-x} + C.$$

Si $x=0$ pour $t=0$, on trouve

$$C = -\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{2}{(a-b)^3}\log\frac{a}{b}.$$

Dans les deux derniers cas, il n'y a aucun intérêt à exprimer x en fonction de t.

---

232. — *Intégrer les équations différentielles du premier ordre :*

$$1^\circ \quad (x-4y)dx + (6y-x)dy = 0,$$

$$2^\circ \quad c\frac{dy}{dx} = (y-a)(b-y), \qquad 3^\circ \quad (1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = ax,$$

$$4^\circ \quad \frac{dy}{dx} - ay = e^{bx}, \qquad 5^\circ \quad y = x\frac{dy}{dx} - \frac{4}{27}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

1° L'équation est homogène et on l'intègre en faisant le changement de variable $y = tx$, $dy = tdx + xdt$, qui donne l'équation

$$(x-4tx)dx + (6tx-x)(tdx+xdt) = 0$$

ou, en séparant les variables,

$$\frac{dx}{x} + \frac{(6t-1)dt}{6t^2-5t+1} = 0;$$

les racines du dénominateur de la fraction rationnelle $\frac{6t-1}{6t^2-5t+1}$ étant égales à $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, cette fraction est égale à $\frac{2}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t-\frac{1}{3}}$; on a donc en intégrant

$$\log x + 2\log\left(t-\frac{1}{2}\right) - \log\left(t-\frac{1}{3}\right) = \log C,$$

$$x\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 = C\left(t-\frac{1}{3}\right),$$

C étant une constante arbitraire; en remplaçant t par $\frac{y}{x}$, on obtient la solution générale exprimée par l'équation rendue entière

$$(2y-x)^2 = \frac{4}{3}C(3y-x).$$

Cette équation représente une famille de paraboles ayant pour diamètre la droite d'équation $2y - x = 0$ et pour tangente à l'origine la droite d'équation $3y - x = 0$.

2° L'équation est analogue à la deuxième de l'exercice précédent; les variables se séparent et l'on a

$$dx = \frac{cdy}{(y-a)(b-y)} = \frac{c}{(b-a)}\left(\frac{dy}{y-a} + \frac{dy}{b-y}\right);$$

si l'on suppose $b > y > a$, l'intégrale de l'équation est

$$x + C = \frac{c}{b-a}\log\frac{y-a}{b-y}, \qquad \frac{y-a}{b-y} = e^{\frac{b-a}{c}(x+C)}.$$

Si y est extérieur à l'intervalle (a, b), il faut remplacer dans l'intégrale $\frac{y-a}{b-y}$ par $\frac{a-y}{b-y}$ ou par $\frac{y-a}{y-b}$, dans tous les cas par $\left|\frac{y-a}{b-y}\right|$.

3° L'équation est linéaire; en supprimant le second membre et séparant les variables dans l'équation restante, on a $\frac{dy}{y} + \frac{xdx}{1-x^2} = 0$, d'où

$$\log y - \frac{1}{2}\log(1-x^2) = \log C, \qquad y = C\sqrt{1-x^2}.$$

En appliquant la méthode de la variation des constantes (n° 397)

et cherchant la valeur de C pour laquelle la fonction y précédente satisfait à l'équation complète, on trouve

$$dC = -\frac{axdx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \text{d'où} \qquad C = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + C'$$

et l'intégrale cherchée est

$$y = a + C'\sqrt{1-x^2}.$$

On pouvait simplifier l'intégration par le changement $y = a + y_1$

4° L'équation est linéaire, la solution de l'équation sans second membre est $y = Ce^{ax}$; en appliquant la méthode de variation des constantes, on a $\frac{dC}{dx} = e^{(b-a)x}$.

Si a est différent de b, on a $C = \frac{1}{b-a}e^{(b-a)x} + C'$, et la solution cherchée est

$$y = \frac{e^{bx}}{b-a} + C'e^{ax}.$$

Si a est égal à b, on a $C = x + C'$ et la solution cherchée est

$$y = xe^{ax} + C'e^{ax}.$$

5° L'équation différentielle est une équation de Clairaut (n° 398) et son intégrale générale est

$$y = Cx - \frac{4}{27}C^3.$$

La solution singulière est l'enveloppe des droites représentées par l'équation précédente; en écrivant que l'équation en C a une racine double, on obtient l'équation de cette enveloppe, $y^2 = x^3$; elle représente une courbe ayant à l'origine un point de rebroussement, et appelée *parabole semi-cubique*.

---

233. — *Trouver une courbe telle que l'ordonnée à l'origine de la tangente en un point soit égale à m fois l'ordonnée du point de contact.*

L'équation de la tangente en un point (x, y) d'une courbe est

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x);$$

l'ordonnée à l'origine, obtenue en remplaçant X par 0, est égale à $y - \frac{dy}{dx}x$; en écrivant qu'elle est égale à my, on obtient l'équation différentielle

$$y - \frac{dy}{dx}x = my.$$

Laissons de côté le cas de $m = 1$ qui donne $x = 0$ ou $y = C^{te}$; dans le cas général, en séparant les variables, on a l'intégrale

$$\log y = (1 - m)\log x + \log C, \qquad \text{d'où} \qquad y = Cx^{1-m};$$

les courbes obtenues en donnant à C toutes les valeurs possibles répondent à la question.

---

234. — *Étant donnée une famille de courbes ou de surfaces dépendant d'un paramètre variable, on appelle trajectoire orthogonale une ligne qui coupe orthogonalement toutes les courbes ou toutes les surfaces de cette famille. Si l'on a une famille de courbes planes représentées par l'équation* $f(x, y, a) = 0$, *le coefficient angulaire de la tangente à la trajectoire orthogonale en un point doit satisfaire à la condition*

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{f'_y}{f'_x},$$

et en éliminant a *entre les deux équations, on a l'équation différentielle de la trajectoire; en intégrant cette dernière équation, on a une famille de trajectoires dépendant d'un paramètre.*

Chercher les trajectoires orthogonales des paraboles $y^2 - 2px = 0$ *où* p *varie et des cercles* $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ *où* a *varie.*

Nous avons déjà établi dans l'exercice **141** la condition d'orthogonalité de deux courbes; les coefficients angulaires $-\frac{f'_x}{f'_y}$ et $\frac{dy}{dx}$ de la tangente à une courbe de la famille et de la tangente à sa trajectoire orthogonale en un point commun (x, y) doivent avoir leur produit égal à -1; on en conclut que l'on doit avoir $\frac{dy}{dx} = \frac{f'_y}{f'_x}$.

Pour trouver les trajectoires orthogonales des paraboles d'équa-

tion $y^2 - 2px = 0$, on élimine p entre cette équation et la suivante :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'_y}{f'_x} = -\frac{y}{p},$$

ce qui conduit à la relation

$$y^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 0.$$

Une première solution, $y = 0$, représente l'axe Ox, les autres solutions sont obtenues en intégrant l'équation

$$y \frac{dy}{dx} + 2x = 0 \qquad \text{ou} \qquad ydy + 2xdx = 0.$$

On voit que la solution générale est fournie par l'équation

$$\frac{y^2}{2} + x^2 = C^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{2C^2} - 1 = 0,$$

C^2 étant une constante arbitraire ; toutes les courbes représentées par cette équation sont des ellipses ayant pour axes de symétrie les axes de coordonnées.

2° En opérant de même dans le cas des cercles représentés par l'équation $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, on doit écrire la relation $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - a}$ et éliminer a entre les deux équations précédentes, ce qui donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Cette équation différentielle est homogène ; en posant $y = tx$, $dy = tdx + xdt$, elle devient

$$tdx(1 + t^2) = x(1 - t^2)dt,$$

ou, en séparant les variables,

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1 - t^2)\,dt}{t(1 + t^2)} = \frac{dt}{t} - \frac{2tdt}{1 + t^2}.$$

La solution de cette équation est

$$\log x = \log t - \log (1 + t^2) + \log 2C,$$

d'où

$$x = \frac{2Ct}{1 + t^2} = \frac{2Cxy}{x^2 + y^2}.$$

En écartant la solution étrangère $x=0$, on obtient la famille de cercles d'équation

$$x^2+y^2-2Cy=0;$$

tous ces cercles sont tangents à l'axe des x à l'origine.

On peut encore parvenir à ce résultat en transformant l'équation différentielle en coordonnées polaires d'après les équations $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, ce qui donne

$$\frac{d\rho\sin\theta+\rho\cos\theta\,d\theta}{d\rho\cos\theta-\rho\sin\theta\,d\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta};$$

tous calculs faits, on parvient à l'équation

$$d\rho\sin\theta=\rho\cos\theta\,d\theta, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\rho}{\rho}=\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta},$$

dont l'intégrale est

$$\log\rho=\log\sin\theta+\log 2C, \qquad \text{ou} \qquad \rho=2C\sin\theta;$$

on trouve ainsi la même famille de cercles que précédemment.

---

235. — *Une tour verticale pleine a la forme d'un solide de révolution et est constituée par des matériaux homogènes de poids spécifique p; on suppose que la charge sur chaque tranche horizontale est répartie uniformément sur tous les éléments de cette tranche, et que la face supérieure supporte un poids P; déterminer la méridienne de la surface de révolution limitant le volume, de façon que la charge sur chaque unité de surface d'une tranche horizontale soit la même pour toutes les tranches.*

Soient r_0 le rayon du parallèle supérieur et r le rayon du parallèle situé à une distance z du précédent. Le volume compris entre les sections dont les distances au sommet sont z et $z+dz$ a pour partie principale πr^2dz et le poids des matériaux dont est formé ce volume est $p\pi r^2dz$; le poids total des matériaux depuis la partie supérieure jusqu'à la tranche considérée est $Q=\int_0^z p\pi r^2dz$, et la charge totale sur cette tranche est $P+Q$. En écrivant que la charge par unité de surface est la même que sur la face supérieure, on a l'équation

$$\frac{P+Q}{\pi r^2}=\frac{P}{\pi r_0^2}, \qquad \text{ou} \qquad P+\int_0^z p\pi r^2dz=\frac{Pr^2}{r_0^2};$$

nous ferons disparaître le signe d'intégration en différentiant les deux membres, ce qui donne l'équation

$$p\pi r^2 dz = \frac{P2rdr}{r_0^2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dr}{r} = \frac{p\pi r_0^2}{2P} dz,$$

dont la solution est fournie par la relation

$$\log r = \log C + \frac{p\pi r_0^2}{2P} z.$$

La constante est déterminée par la condition initiale $r = r_0$ pour $z = 0$, ce qui donne $C = r_0$ et la solution cherchée est

$$r = r_0 e^{\frac{p\pi r_0^2}{2P} z}.$$

---

236. — *Intégrer les équations différentielles :*

1° $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x(a - x)$;

2° $\dfrac{d^2y}{dx^2} = y(a - y)$;

3° $2y \dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$;

4° $a \dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$;

5° $4 \dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 2x^2 + 1$;

6° $\dfrac{d^3y}{dx^3} - y = e^{-x}$;

7° $(1 + x^2) \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x \dfrac{dy}{dx} = 6x^2 + 2$, (*elle admet la solution* $y_0 = x^2$);

8° $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos mx$, (*cas de* $m = \pm 1$);

9° $\dfrac{d^2x}{dt^2} + A \dfrac{dx}{dt} + Bx = C \cos \dfrac{2\pi t}{T}$, (A, B, C *sont des constantes*);

10° $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x \dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$;

pour intégrer la dernière, on cherchera des solutions de la forme $y = x^r$.

1° En intégrant deux fois successivement par rapport à x, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1, \qquad y = \frac{ax^3}{6} - \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2.$$

2° L'équation ne renferme pas la variable x et on l'intègre (n° 402) en posant

$$\frac{dy}{dx}=p, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}.$$

L'équation devient ainsi

$$p\frac{dp}{dy}=y(a-y), \qquad \text{ou} \qquad pdp=y(a-y)dy,$$

dont l'intégrale est donnée par

$$\frac{p^2}{2}=\frac{ay^2}{2}-\frac{y^3}{3}+C_1.$$

On est ramené à intégrer l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=ay^2-\frac{2}{3}y^3+2C_1,$$

dont l'intégrale est donnée par la relation

$$x+C_2=\pm\int\frac{dy}{\sqrt{ay^2-\frac{2}{3}y^3+2C_1}}.$$

Lorsque C_1 n'est pas nul, l'intégrale du second membre ne peut pas être déterminée par les fonctions élémentaires et elle se ramène aux intégrales elliptiques ; lorsque $C_1=0$, ce qui exprime que p ou $\frac{dy}{dx}$ est nul pour $y=0$, on peut achever l'intégration par le changement de variable $a-\frac{2}{3}y=z^2$, qui donne $dy=-3zdz$, et conduit à l'intégrale

$$x+C_2=\pm\int\frac{2dz}{z^2-a}.$$

Si a est positif et si z^2-a est aussi positif, ce qui entraîne y négatif, l'intégrale du second membre est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{z-\sqrt{a}}{z+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a-\frac{2}{3}y}-\sqrt{a}}{\sqrt{a-\frac{2}{3}y}+\sqrt{a}},$$

et on en déduit, tous calculs faits, la valeur de y

$$y = \frac{-6ae^{\sqrt{a}(x+C_2)}}{\left[1 - e^{\sqrt{a}(x+C_2)}\right]^2} = -\frac{3}{2}\frac{a}{\mathrm{sh}^2\left[\frac{\sqrt{a}(x+C_2)}{2}\right]}.$$

Si a est encore positif, mais $z^2 - a$ négatif, ce qui entraîne y positif, l'intégrale du second membre est $\frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a}-z}{z+\sqrt{a}}$ et on en déduit cette fois

$$y = \frac{6ae^{\sqrt{a}(x+C_2)}}{\left[1 + e^{\sqrt{a}(x+C_2)}\right]^2} = \frac{3}{2}\frac{a}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\sqrt{a}(x+C_2)}{2}\right]}.$$

Si a est négatif, égal à $-a'$, ce qui entraîne y négatif, l'intégrale du second membre est égale à $\frac{2}{\sqrt{a'}}$ arc tg $\frac{z}{\sqrt{a'}}$, et on en déduit

$$z = \sqrt{a'}\ \mathrm{tg}\frac{\sqrt{a'}(x+C_2)}{2}, \qquad y = -\frac{3}{2}\frac{a'}{\cos^2\left[\frac{\sqrt{a'}(x+C_2)}{2}\right]}.$$

3° En utilisant de même l'inconnue auxiliaire $p = \frac{dy}{dx}$, on forme l'équation

$$2yp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2, \qquad \frac{dy}{y} = \frac{2pdp}{1+p^2},$$

dont l'intégrale est donnée par la relation

$$\log y = \log(1+p^2) + \log C_1, \qquad \text{d'où} \qquad y = C_1(1+p^2),$$

C_1 étant une constante arbitraire ; on en déduit l'équation du premier ordre

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{C_1} - 1, \qquad dx = \frac{\pm dy}{\sqrt{\frac{y}{C_1} - 1}},$$

dont l'intégrale est

$$x - C_2 = \pm 2C_1\sqrt{\frac{y}{C_1} - 1}, \qquad \text{d'où} \qquad (x - C_2)^2 = 4C_1(y - C_1),$$

C_2 étant une deuxième constante arbitraire ; la solution générale représente une famille de paraboles ayant pour directrice l'axe des x.

4° On pourrait employer la même méthode, mais il est plus simple de considérer $\frac{dy}{dx}=y'$ comme une fonction de x satisfaisant à l'équation

$$a\frac{dy'}{dx}=\sqrt{1+y'^2}, \qquad \frac{dx}{a}=\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

dont l'intégrale est donnée par

$$\frac{x-x_0}{a}=\log\left(y'+\sqrt{1+y'^2}\right), \qquad y'+\sqrt{1+y'^2}=e^{\frac{x-x_0}{a}},$$

x_0 étant une constante. En remarquant que l'on a

$$y'-\sqrt{1+y'^2}=\frac{-1}{y'+\sqrt{1+y'^2}}=-e^{-\frac{x-x_0}{a}},$$

et ajoutant les deux équations, on trouve

$$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}}-e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right)=\operatorname{sh}\frac{x-x_0}{a},$$

et en intégrant, on obtient la solution

$$y=y_0+\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}}+e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right)=y_0+\frac{a}{2}\operatorname{ch}\frac{x-x_0}{a},$$

où y_0 est une deuxième constante arbitraire ; cette équation représente une famille de chaînettes qui se déduisent toutes d'une même chaînette $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ par une translation quelconque dans le plan.

5° L'équation est linéaire du second ordre et le premier membre a ses coefficients constants ; l'équation caractéristique (n° 404) est $4r^2-1=0$ et a pour racines $r_1=\frac{1}{2}$ et $r_2=-\frac{1}{2}$; l'intégrale de l'équation sans second membre est $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-\frac{x}{2}}$.

Nous chercherons une intégrale particulière y_0 de l'équation totale de la forme $y_0=a+bx+cx^2$; en substituant cette valeur à y et identifiant les deux membres, nous trouvons $c=-2$, $b=0$, $a=-17$; l'intégrale générale de l'équation est alors

$$y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-\frac{x}{2}}-17-2x^2.$$

6° L'équation caractéristique de l'équation sans second membre est $r^3 - 1 = 0$ et a pour racines

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \qquad r_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2};$$

l'intégrale de l'équation sans second membre est

$$y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Nous chercherons une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $y_0 = he^{-x}$; après substitution, nous obtenons $h = -\frac{1}{2}$, l'intégrale générale est alors

$$y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

7° En utilisant la solution particulière x^2 et posant $y = x^2 + z$, on est ramené à l'équation homogène

$$\frac{d^2z}{dx^2}(1 + x^2) + 2x\frac{dz}{dx} = 0$$

qui ne renferme pas z, on l'intègre en considérant $\frac{dz}{dx} = z'$ comme inconnue et écrivant

$$\frac{1}{z'}\frac{dz'}{dx} + \frac{2x}{1 + x^2} = 0,$$

d'où $\log z' + \log(1 + x^2) = \log C, \qquad z' = \frac{C}{1 + x^2},$

C étant une constante.

En intégrant encore une fois, on a $z = C \operatorname{arc\,tg} x + C'$ et l'intégrale de l'équation donnée est

$$y = x^2 + C \operatorname{arc\,tg} x + C'.$$

8° L'équation différentielle homogène obtenue en supprimant le second membre a pour équation caractéristique $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$, qui a pour racines doubles $+i$ et $-i$. La solution générale est (n° 406)

$$(C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x.$$

Si m n'est pas égal à $+1$ ou -1, l'équation complète a une solution particulière de la forme $y_0 = \alpha \cos mx$; par substitution, on

trouve $\alpha(m^4 - 2m^2 + 1) = 1$, $\alpha = \frac{1}{(m^2-1)^2}$ et la solution générale est

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x + \frac{\cos mx}{(m^2-1)^2}.$$

Si $m = \pm 1$, une solution particulière de l'équation complète est de la forme

$$y_0 = (\alpha + \beta x + \gamma x^2)\cos x + (\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2)\sin x;$$

par substitution et identification, on trouve $\gamma = -\frac{1}{8}$, $\gamma' = 0$, tandis que α, β, α' et β' restent indéterminés et l'on obtient pour solution générale

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x - \frac{x^2}{8}\cos x.$$

9° L'équation sans second membre a pour équation caractéristique $r^2 + Ar + B = 0$.

Si $A^2 - 4B > 0$, les racines sont réelles et ont pour valeurs

$$r_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, \qquad r_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2},$$

d'où la solution

$$C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Si $A^2 - 4B < 0$, les racines sont imaginaires, d'où la solution

$$e^{-\frac{A}{2}t}\left[C_1 \cos \frac{\sqrt{4B - A^2}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{4B - A^2}}{2} t\right].$$

Enfin si $A^2 - 4B = 0$, les racines sont égales, d'où la solution

$$(C_1 + C_2 t)e^{-\frac{A}{2}t}.$$

Une solution particulière de l'équation complète a la forme

$$x_0 = \alpha \cos \frac{2\pi t}{T} + \beta \sin \frac{2\pi}{T} t;$$

en posant pour simplifier $\frac{2\pi}{T} = m$, la recherche des coefficients est toujours possible à moins que l'on ait $A = 0$, $B - m^2 = 0$. Dans le cas général, la substitution et l'identification donnent

$$\alpha = \frac{C(B - m^2)}{(B - m^2)^2 + A^2 m^2}, \qquad \beta = \frac{ACm}{(B - m^2)^2 + A^2 m^2},$$

et la solution particulière qu'il faut ajouter à la solution de l'équation sans second membre pour avoir la solution générale de l'équation complète est

$$x_0 = \frac{C}{\left(B - \frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 + A^2 \frac{4\pi^2}{T^2}} \left[\left(B - \frac{4\pi^2}{T^2}\right) \cos \frac{2\pi t}{T} + A \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi t}{T}\right].$$

Dans le cas particulier où $A = 0$, $B = \frac{4\pi^2}{T^2}$, l'équation donnée prend la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T^2} x = C \cos \frac{2\pi t}{T};$$

une solution particulière est de la forme

$$(\alpha + \beta t) \cos \frac{2\pi t}{T} + (\alpha' + \beta' t) \sin \frac{2\pi t}{T};$$

par substitution et identification, on trouve $\beta = 0$, $\beta' = \frac{CT}{4\pi}$, tandis que α et α' restent indéterminés; la solution générale de l'équation complète est alors

$$x = C_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + C_2 \sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{CT}{4\pi} t \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

L'équation précédente est celle du mouvement amorti d'un mobile avec une force excitatrice périodique.

10° Pour qu'une fonction $y = x^r$ soit solution de l'équation donnée, il faut que l'on ait identiquement

$$\varphi(r) = r(r-1) + r - 4 = 0.$$

Les racines de cette équation caractéristique étant $r_1 = +2$ et $r_2 = -2$, on voit que la solution générale de l'équation est

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}.$$

Plus généralement, si l'on a une équation de la forme

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0,$$

on cherche une solution de la forme $y = x^r$; r doit satisfaire à l'équation caractéristique

$$\varphi(r) = a_0 r(r-1) \cdots (r-n+1) + a_1 r(r-1) \cdots (r-n+2) + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Si les racines sont distinctes et ont pour valeurs r_1, $r_2, \ldots r_n$, la solution générale est

$$y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} + \cdots + C_n x^{r_n};$$

s'il y a des racines égales, par exemple si $r_1 = r_2 = \cdots = r_k$, les k termes correspondants dans la solution précédente doivent être remplacés par

$$x^{r_1}[C_1 + C_2 \log x + C_3 \log^2 x + \cdots + C_k \log^{k-1} x].$$

---

237. — *Les équations du mouvement d'un point pesant sont*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -g;$$

déterminer la solution de ces équations satisfaisant aux conditions suivantes: la position initiale du mobile est l'origine, de plus, la vitesse initiale est égale à v_0 *et est dirigée dans le plan des* xz *suivant une droite faisant avec* Ox *un angle donné* α.

En intégrant une première fois, on a

$$\frac{dx}{dt} = C_1, \qquad \frac{dy}{dt} = C_2, \qquad \frac{dz}{dt} = -gt + C_3;$$

une deuxième intégration donne

$$x = C_1 t + C_1', \qquad y = C_2 t + C_2', \qquad z = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_3';$$

les six constantes sont données par les conditions initiales; pour $t = 0$, les valeurs de x, y, z doivent être nulles, d'où $C_1' = C_2' = C_3' = 0$; de plus les dérivées par rapport au temps doivent avoir les valeurs

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 \cos\alpha, \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = v_0 \sin\alpha, \qquad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0,$$

on en déduit $C_1 = v_0 \cos\alpha$, $C_2 = v_0 \sin\alpha$, $C_3 = 0$ et la solution cherchée est $x = v_0 t \cos\alpha$, $y = v_0 t \sin\alpha$, $z = -\dfrac{gt^2}{2}$.

---

238. — *Intégrer les équations simultanées*

$$1^\circ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x-y), \\ \dfrac{dy}{dt} = b(y-x), \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \omega y = -a \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} - \omega x = a \cos t, \end{cases}$$

$$3^\circ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y, \end{cases} \qquad 4^\circ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z - x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y. \end{cases}$$

1° Nous éliminerons y en différentiant la première équation, ce qui donne

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right);$$

en tirant y et $\dfrac{dy}{dt}$ des équations données, on obtient

$$y = x - \frac{1}{a}\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{b}{a}\frac{dx}{dt},$$

et on en déduit l'équation donnant x :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (a+b)\frac{dx}{dt}.$$

Si $a + b \neq 0$, la solution de cette équation est

$$x = C_1 + C_2 e^{(a+b)t}, \qquad \text{d'où} \qquad y = C_1 - \frac{b}{a} C_2 e^{(a+b)t}.$$

Si $a + b = 0$, la solution est

$$x = C_1 + C_2 t, \qquad y = C_1 - \frac{C_2}{a} + C_2 t.$$

On peut trouver *a priori* deux intégrales particulières en remarquant que l'on a

$$\frac{d}{dt}(bx + ay) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad bx + ay = C'$$

et $$\frac{d}{dt}(x - y) = (a+b)(x-y), \qquad \text{d'où} \qquad x - y = C'' e^{(a+b)t}.$$

2° En éliminant y et $\frac{dy}{dt}$ après avoir différentié la première équation, nous trouverons le système

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = -a(\omega + 1)\cos t,$$
$$y = -\frac{a}{\omega}\sin t - \frac{1}{\omega}\frac{dx}{dt}.$$

L'équation donnant x, privée de second membre, a pour solution générale $C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ (N° 399). Si $\omega^2 - 1 \neq 0$, une solution particulière est $x_0 = \frac{-a}{\omega - 1}\cos t$ et la solution générale du système est

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{a}{\omega - 1}\cos t,$$

$$y = C_1 \sin \omega t - C_2 \cos \omega t - \frac{a}{\omega - 1}\sin t.$$

Si $\omega = -1$, l'équation en x n'a pas de second membre et la solution générale du système est

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$
$$y = (a - C_1)\sin t + C_2 \cos t.$$

Enfin si $\omega = 1$, il faut chercher une solution particulière de l'équation en x de la forme $\alpha t \cos t + \beta t \sin t$; par substitution et identification, on trouve $\alpha = 0$, $\beta = -a$, de sorte que la solution du système est

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - at \sin t,$$
$$y = C_1 \sin t - C_2 \cos t + at \cos t.$$

3° En différentiant la première équation, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 2x + \frac{dx}{dt}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$$

L'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ a pour racines 2 et -1, de sorte que l'on a

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t};$$

y est ensuite donné par l'équation

$$\frac{dy}{dt} = x + \left(\frac{dx}{dt} - y\right) = -y + 3C_1 e^{2t},$$

dont la solution est

$$y = C_3 e^{-t} + C_1 e^{2t},$$

C_3 étant une nouvelle constante.

Enfin z s'exprime au moyen de x et y par

$$z = \frac{dx}{dt} - y = C_1 e^{2t} - (C_2 + C_3) e^{-t}.$$

La solution trouvée renferme bien trois constantes arbitraires et elle est la solution générale. On peut remarquer qu'une intégrale du système est fournie par l'équation

$$\frac{d}{dt}(x + y + z) = 2(x + y + z),$$

d'où $x + y + z = C' e^{2t}$; on peut en déduire ensuite x, y et z en reprenant chacune des équations données; elles se ramènent alors à des équations renfermant chacune une seule fonction inconnue.

4° Pour éliminer y et z, il est nécessaire de dériver deux fois la première équation, et d'utiliser les dérivées des deux autres; on obtient ainsi le système suivant équivalent au premier :

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{dx}{dt} = 0, \qquad y - z = \frac{dx}{dt}, \qquad y + z = 2x + \frac{d^2x}{dt^2}.$$

L'équation caractéristique de l'équation en x est $r^3 + 3r = 0$, ses racines sont $r_1 = 0$, $r_2 = i\sqrt{3}$, $r_3 = -i\sqrt{3}$; on en déduit la solution générale de l'équation en x, puis celle du système, sous la forme suivante, renfermant trois constantes

$$x = C_1 + C_2 \cos\sqrt{3}\, t + C_3 \sin\sqrt{3}\, t,$$

$$y = C_1 + \left(\frac{-C_2 + \sqrt{3}\, C_3}{2}\right) \cos\sqrt{3}\, t + \left(\frac{-C_3 - \sqrt{3}\, C_2}{2}\right) \sin\sqrt{3}\, t,$$

$$z = C_1 + \left(\frac{-C_2 - \sqrt{3}\, C_3}{2}\right) \cos\sqrt{3}\, t + \left(\frac{-C_3 + \sqrt{3}\, C_2}{2}\right) \sin\sqrt{3}\, t.$$

On peut encore remarquer que l'on obtient des intégrales du système par les combinaisons

$$\frac{d}{dt}(x + y + z) = 0, \qquad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0,$$

d'où $$x + y + z = C', \qquad x^2 + y^2 + z^2 = C''.$$

On voit que les lignes représentées par les solutions sont des cercles, intersections de sphères ayant pour centre l'origine et de plans perpendiculaires à la droite $x = y = z$.

Les équations obtenues sont celles du mouvement d'un point mobile tournant autour de cette droite avec une vitesse angulaire constante égale à $\sqrt{3}$.

---

239. — *Intégrer les équations simultanées suivantes, qui se présentent en électromagnétisme :*

$$M \frac{dC_1}{dt} + L_2 \frac{dC_2}{dt} + R_2 C_2 = E_2,$$

$$M \frac{dC_2}{dt} + L_1 \frac{dC_1}{dt} + R_1 C_1 = E_1;$$

on suppose constants et positifs les coefficients et les seconds membres.

Après différentiation de la première équation et élimination de C_2, on trouve le système équivalent

$$(M^2 - L_1 L_2) \frac{d^2 C_1}{dt^2} - (R_2 L_1 + R_1 L_2) \frac{dC_1}{dt} - R_1 R_2 C_1 = - R_2 E_1,$$

$$R_2 M C_2 = -(M^2 - L_1 L_2) \frac{dC_1}{dt} + R_1 L_2 C_1 + E_2 M - E_1 L_2.$$

Si $M^2 - L_1 L_2 = 0$, le système se réduit à un autre plus simple et a pour solution

$$C_1 = \alpha e^{mt} + \beta, \qquad C_2 = \gamma e^{mt} + \delta,$$

où α est une constante arbitraire, et où l'on pose

$$m = - \frac{R_1 R_2}{R_2 L_1 + R_1 L_2}, \qquad \beta = \frac{E_1}{R_1}, \qquad \delta = \frac{E_2}{R_2}, \qquad \gamma = \frac{R_1 L_2 \alpha}{R_2 M}.$$

On peut encore l'écrire sous la forme

$$C_1 = k \frac{\sqrt{M L_1}}{R_1} e^{mt} + \frac{E_1}{R_1}, \qquad C_2 = k \frac{\sqrt{M L_2}}{R_2} e^{mt} + \frac{E_2}{R_2},$$

où m a la valeur précédente et k est une constante arbitraire.

Dans le cas général où $M^2 - L_1 L_2 \neq 0$, l'équation différentielle

à laquelle satisfait C_1, privée de second membre, a pour équation caractéristique

$$(M^2 - L_1L_2)r^2 - (R_2L_1 + R_1L_2)r - R_1R_2 = 0.$$

Ses racines,

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = \frac{(R_2L_1 + R_1L_2) \pm \sqrt{(R_2L_1 - R_1L_2)^2 + 4R_1R_2M^2}}{2(M^2 - L_1L_2)},$$

sont toujours réelles, et la solution générale de l'équation en C_1, ainsi que la valeur de C_2 que l'on en déduit sont

$$C_1 = k_1e^{r_1t} + k_2e^{r_2t} + \frac{E_1}{R_1},$$

$$C_2 = \frac{-R_2L_1 + R_1L_2 - \sqrt{H}}{2R_2M}k_1e^{r_1t} + \frac{-R_2L_1 + R_1L_2 + \sqrt{H}}{2R_2M}k_2e^{r_2t} + \frac{E_2}{R_2},$$

où H désigne la quantité sous le radical entrant dans les valeurs de r_1 et r_2 et où k_1, k_2 désigne t deux constantes arbitraires.

Pour mettre plus de symétrie dans la forme du résultat, nous introduirons deux nombres positifs A_1 et A_2, définis par les égalités

$$A_1^2 = \sqrt{H} + R_1L_2 - R_2L_1, \qquad A_2^2 = \sqrt{H} + R_2L_1 - R_1L_2,$$

et nous poserons

$$C_1 = \frac{A_1}{\sqrt{2R_1M}}k'_1e^{r_1t} + \frac{A_2}{\sqrt{2R_2M}}k'_2e^{r_2t} + \frac{E_1}{R_1},$$

où k'_1 et k'_2 sont deux constantes; nous en déduirons

$$C_2 = \frac{-A_2}{\sqrt{2R_2M}}k'_1e^{r_1t} + \frac{A_1}{\sqrt{2R_2M}}k'_2e^{r_2t} + \frac{E_2}{R_2}.$$

---

240. — *Intégrer les équations aux dérivées partielles*

1° $ap + bq = c$; 2° $py + qx = 0$; 3° $px + qy = \frac{xy}{z}$,

4° $pq = 1$; 5° $p^2 + q^2 = a^2$; 6° $p + q = mz$;

7° $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A^2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2AB\frac{\partial z}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u = 0$

(*équations des télégraphistes*).

1° La méthode du n° 415 conduit à intégrer le systeme

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c},$$

dont deux intégrales sont

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=C_1, \qquad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=C_2.$$

Les lignes caractéristiques sont des droites parallèles à la direction (a, b, c); l'intégrale générale est donnée par l'équation

$$\Phi\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}, \quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=0,$$

où Φ est une fonction arbitraire; elle représente un cylindre quelconque dont les génératrices sont parallèles à la direction précédente (a, b, c).

2° La même méthode conduit au système

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0},$$

dont deux intégrales sont $z=C_1$ et $x^2-y^2=C_2$. Les lignes caractéristiques sont des hyperboles équilatères tracées dans des plans parallèles au plan xOy; l'intégrale générale est donnée par l'équation $z=\varphi(x^2-y^2)$, où φ est une fonction arbitraire.

3° En opérant de même, on est conduit au système

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{zdz}{xy},$$

ou

$$ydx=xdy=zdz=\frac{ydx+xdy}{2},$$

qui fournit deux intégrales

$$\frac{y}{x}=C_1, \qquad z^2-xy=C_2.$$

Les lignes caractéristiques sont des courbes du second ordre situées dans des plans passant par Oz; l'intégrale générale est fournie par l'équation $z^2-xy=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, où φ est une fonction arbitraire.

4° En suivant la méthode du n° 416, on voit que l'on a une intégrale complète fournie par l'équation

$$z=C_1x+C_2y+C_3,$$

lorsque les trois coefficients satisfont à la condition $C_1C_2 = 1$. L'équation renferme encore deux paramètres et représente un plan variable. Pour avoir l'intégrale générale, on établira entre les deux paramètres une relation arbitraire ; l'enveloppe du plan sera alors une certaine surface réglée développable ; il n'y a pas d'intégrale singulière.

5° De la même manière, l'intégrale complète sera représentée par l'équation

$$z = C_1 x + C_2 y + C_3$$

avec la condition $C_1^2 + C_2^2 = a^2$.

Tous les plans représentés par cette équation forment avec l'axe Oz un angle constant dont le cosinus est

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

6° En posant $q = C_1 p$, où C_1 est une constante arbitraire, on obtient l'équation $p(1 + C_1) = mz$, et on en déduit

$$dz = pdx + qdy = \frac{mz}{1 + C_1}(dx + C_1 dy);$$

cette dernière équation a pour intégrale

$$\log z = \frac{m}{1 + C_1}(x + C_1 y) + \log C_2,$$

et l'on obtient ainsi une intégrale complète de l'équation donnée

$$z = C_2 e^{\frac{m(x + C_1 y)}{1 + C_1}}.$$

7° L'équation dite des télégraphistes, qui détermine soit la variation du potentiel V soit la variation de l'intensité I dans un fil qui transmet une perturbation électrique est de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2AB \frac{\partial z}{\partial t}.$$

On peut en déterminer une infinité de solutions particulières, de la forme $z = Ce^{\alpha x + \beta t}$ et faire la somme d'un nombre quelconque de ces solutions (n° 418) ; C_1 est une constante arbitraire ; α et β sont des nombres constants assujettis à satisfaire à l'équation caractéristique

$$\alpha^2 = A^2\beta^2 + 2AB\beta.$$

Si β est réel, α est aussi réel; si β est imaginaire de la forme $\beta'' i$, α est imaginaire de la forme $\alpha' + \alpha'' i$, et la solution considérée peut être écrite sous la forme

$$Ce^{\alpha' x} \cos(\alpha'' x + \beta'' t) + C' e^{\alpha' x} \sin(\alpha'' x + \beta'' t).$$

On peut simplifier l'équation; en multipliant les variables x et t par des coefficients convenablement choisis, on la ramène à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Si l'on pose ensuite $z = ue^{-t}$, u étant une fonction inconnue de x et t, on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-t}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} e^{-t} - ue^{-t},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} e^{-t} - 2 \frac{\partial u}{\partial t} e^{-t} + ue^{-t},$$

et la fonction u satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u = 0.$$

On détermine comme précédemment des solutions de cette équation de la forme $u = Ce^{\alpha x + \beta t}$, α et β étant assujettis à satisfaire à l'équation caractéristique

$$\alpha^2 - \beta^2 + 1 = 0.$$

Si α est réel, β est aussi réel, et l'on peut constituer une solution par une somme de termes de la forme

$$Ce^{\alpha x} e^{\sqrt{1 + \alpha^2} t}.$$

Si β est imaginaire de la forme $\beta'' i$, α est aussi imaginaire de la forme $i\sqrt{1 + \beta''^2}$, et l'on peut constituer une solution par une somme de termes de la forme

$$C \cos\left(\sqrt{1 + \beta''^2} x + \beta'' t\right) + C' \sin\left(\sqrt{1 + \beta''^2} t + \beta'' t\right).$$

TABLE DES MATIÈRES

CHARTRES. — IMPRIMERIE DURAND, RUE FULBERT.

H. VOGT
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE NANCY

SOLUTIONS
DES EXERCICES PROPOSÉS
DANS LES
ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

DEUXIÈME ÉDITION

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
63, Boulevard Saint-Germain, 63

1919

EXTRAIT DU CATALOGUE

DE LA LIBRAIRIE VUIBERT

Boulevard Saint-Germain, 63, Paris.

Cours de Géométrie descriptive, par X. ANTOMARI,

docteur ès sciences, professeur de mathématiques spéciales au lycée Carnot. — Vol. 25/16cm avec 496 figures et épures dans le texte. 5e édit. 10 fr. »

Éléments de Méthodologie mathématique,

à l'usage de tous ceux qui s'occupent de mathématiques, par M. DAUZAT, inspecteur d'Académie. — Vol. 22/14cm de 1100 pages, avec figures, 2e édition. 10 fr. »

Cet ouvrage comprend :

1° des considérations générales sur les mathématiques élémentaires et leur enseignement ;
2° un résumé raisonné des théories arithmétiques, algébriques et géométriques ;
3° un exposé des méthodes et des procédés de démonstration et de résolution des questions élémentaires de mathématiques ;
4° l'application de ces méthodes à l'étude de plus de 500 questions.

Ce n'est pas un cours que l'auteur a voulu écrire, mais un résumé raisonné de chacune des trois branches fondamentales des mathématiques pures, qui peut servir de memento pour une revision de cours, et dans lequel on a cherché à faire ressortir la raison d'être des choses les rapports de dépendance des unes à l'égard des autres, les liens qui mettent de l'unité là où il en est besoin, les côtés par lesquels les théories des nombres et de l'étendue se rapprochent et se prêtent un mutuel appui. Et tout cela avec les seules démonstrations indispensables, se limitant souvent à de sommaires indications, à des vérités simplement énoncées.

Problèmes de Géométrie analytique, *à deux et à trois dimensions*

(avec les solutions), par E. MOSNAT, professeur au collège Rollin. — 3 vol. 22/14cm :

TOME I, à l'usage des candidats aux écoles Centrale, Navale, des Ponts et Chaussées, des Mines de Paris et de Saint-Etienne. 4e édition. . 7 fr. »

TOME II (*Géométrie à deux dimensions*), à l'usage des candidats à l'école Polytech., à l'école Normale, à l'Agrégation. 2e éd., très augmentée. 7 fr. »

TOME III (*Géométrie à trois dimensions*), à l'usage des candidats à l'école Polytech., à l'école Normale, à l'Agrégation. 2e éd. augmentée. 7 fr. »

THÉORIE DES NOMBRES IRRATIONNELS, *des limites et de la continuité,*

par RENÉ BAIRE, professeur à l'Université de Dijon. — Vol. 22/14cm, 2e édition. . . . . 1 fr. 50

THÉORIE DES NOMBRES ET ALGÈBRE SUPÉRIEURE

(*Introduction à l'étude de la*), d'après des conférences faites à l'école Normale supérieure par M. JULES TANNERY et rédigées par EMILE BOREL et JULES DRACH. — Un fort volume 25/16cm. . . . 10 fr. »

LEÇONS SUR LES COORDONNÉES TANGENTIELLES,

par G. PAPELIER, professeur au lycée d'Orléans, avec une préface de M. P. APPELL, membre de l'Institut :

Géométrie plane. — Un vol. 22/14cm, 2e édition. . . 5 fr. »
Géométrie dans l'espace. — Un vol. 22/14cm. . . . 5 fr. »



Précis de Mathématiques spéciales

par G. PAPELIER, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Orléans :

Algèbre, Analyse et Trigonométrie. — Volume 22/14^{cm}, avec figures, 7e édition. . . . . 7 fr. 50

Géométrie analytique *à deux et à trois dimensions.* — Volume 22/14^{cm}, avec figures, 5e édition.. . . . . 10 fr. »

Mécanique. — Volume 22/14^{cm}, avec figures, 3e édition. . . 5 fr. »

Géométrie descriptive. — Volume 22/14^{cm}, avec figures. *(Sous presse.)*

Formulaires de Mathématiques spéciales

Formulaire d'Algèbre, de Trigonométrie et de Géométrie analytique, par G. PAPELIER. — Volume 22/12^{cm}, avec pages blanches pour notes, 3e édition, broché. . . . . 2 fr. »
Cartonné toile souple. . . . . 2 fr. 50

Formulaire de Mécanique, par Th. CARONNET, professeur au collège Chaptal. — Volume 22/12^{cm}, avec pages blanches pour notes. 1 fr. 25

Exercices de Mathématiques spéciales

par MM. P. Aubert, professeur au lycée Henri IV, et G. Papelier. — Vol. 22/14^{cm} :

Exercices d'Algèbre, Analyse et Trigonométrie. — 2 vol. avec figures, chacun. 6 fr. »

Exercices de Géométrie analytique. — 3 vol. :

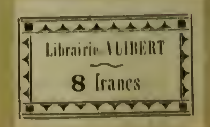
I. Géométrie plane ;
II. Géométrie plane *(Suite)* ;
III. Géométrie dans l'espace. Chaque volume. . . . . . 6 fr. »

Exercices de Mécanique. — 1 vol.. . . . . 6 fr »

Revue de Mathématiques spéciales

(30e année)

Revue 28/22^{cm}, avec figures et épures dans le texte, paraissant tous les mois et publiée par MM. E. HUMBERT, ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, et G. PAPELIER, ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Orléans, avec la collaboration de MM. AUBERT, P. LAMAIRE, Ch. RIVIÈRE, H. VUIBERT. — Abonnement annuel, remontant au 1er octobre : France et Colonies, 15 fr. ; Étranger. 16 fr. »





UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 067480670